

Modelagem Matemática na Socioeducação

Mathematical Modeling in socio-education

Dirceu dos Santos Brito¹

Secretaria de Educação do Estado do Paraná, SEED, Londrina, PR, Brasil

Lourdes Maria Werle de Almeida²

Universidade Estadual de Londrina, UEL, Londrina, PR, Brasil

Resumo

Este artigo tem como objetivo estruturar uma aproximação entre Modelagem Matemática e Socioeducação. Inicialmente apresenta e discute os conceitos de Socioeducação e Modelagem Matemática, buscando pontos de convergência entre ambas. Em seguida, apresenta e analisa atividades de modelagem desenvolvidas com adolescentes que cumprem medidas socioeducativas em meio fechado em um Centro de Socioeducação (CENSE) buscando evidências de uma formação socioeducativa dos internos mediada por essas atividades. O que esta análise indica é que a Socioeducação pode ser mediada por atividades de modelagem e, neste sentido, as atividades, ao mesmo tempo em que favorecem a aprendizagem dos alunos, também os integra em um universo de ações que visam a sua reintegração na sociedade.

Palavras-chave: Modelagem matemática, Socioeducação, Otimização geométrica.

Abstract

This article aims to structure an approach between Mathematical Modeling and Socio-Education. It initially presents and discusses the concepts of socio-education and Mathematical Modeling, looking for converging points between them. Then, it presents and analyzes modeling activities developed with teenagers who are serving educational measures under enclosed environment inside a Socio-Education Center (CENSE), searching for evidence of interns' socio-educative learning mediated by these activities. What this analysis indicates is that Socio-Education may be mediated by modeling activities and, in this sense, the activities, while assist students' learning, also include them in a universe of actions that seek their reintegration into society.

Keywords: Mathematical modeling, Socio-education, Geometric optimization.

Introdução

Este artigo apresenta resultados de uma pesquisa cuja finalidade é estruturar uma possível aproximação entre Modelagem Matemática e Socioeducação, a partir de um conjunto de atividades desenvolvidas com adolescentes internados no Centro de Socioeducação (CENSE). A internação desses adolescentes decorre da aplicação de

1 Graduado em Matemática; Mestre em Ensino de Ciências e Educação Matemática e Mestre em Matemática. Professor da Rede Estadual de Educação no Paraná. E-mail: dirbrito@gmail.com

2 Graduação em Licenciatura em Matemática, Mestrado em Matemática, Doutorado em Engenharia de Produção. Professora da Universidade Estadual de Londrina. E-mail: lourdes@uel.br

medidas socioeducativas em meio fechado, ou seja, com privação de liberdade, em função da prática de atos infracionais.

Essas medidas, previstas no Estatuto da Criança e do Adolescente, devem ter um caráter educativo e não punitivo, por isso, os adolescentes internados são compulsoriamente inseridos num ambiente de atividades educacionais com o objetivo de promover sua reinserção na vida social. A caracterização da Socioeducação contempla indicativos desse trabalho com adolescentes.

O trabalho de Modelagem Matemática realizado com os adolescentes internados no CENSE teve, portanto, como viés pedagógico o conceito e a prática da Socioeducação. Por isso, no planejamento e na execução das atividades que subsidiam nossas argumentações neste artigo procurou-se atender aos aspectos essenciais da Modelagem Matemática na perspectiva da Educação Matemática e também aos princípios educacionais que decorrem do conceito de Socioeducação. Nesse sentido é que são apresentados indícios de possíveis aproximações entre a Modelagem Matemática e a Socioeducação.

A temática das atividades de modelagem desenvolvidas é *Praças públicas* e os conteúdos abordados incluem escala, proporção, cálculo de área, ângulo, simetria, transformações no plano, congruência, semelhança entre polígonos e problemas de otimização em geometria plana. Entre os objetivos de aprendizagem, citamos: interpretar problemas de natureza geométrica; reconhecer problemas de otimização em geometria em situações cotidianas; utilizar construções geométricas para tomada de decisões; realizar experimentos de natureza geométrica; desenvolver argumentações em geometria; construir demonstrações formais e informais de proposições geométricas.

Para além da abordagem desses conceitos da matemática curricular, as atividades possibilitaram aos alunos um conjunto de ações e de procedimentos favoráveis ao seu desenvolvimento como cidadãos, tendo em vista a sua atuação quando reinseridos na sociedade.

Nesse artigo, descrevemos e analisamos o desenvolvimento dessas atividades de Modelagem Matemática. Inicialmente, apontamos possíveis aproximações teóricas entre a Modelagem Matemática e a Socioeducação. Depois, descrevemos a organização das aulas de Matemática no CENSE, em seguida, apresentamos a concepção das atividades de Modelagem Matemática e seus objetivos de aprendizagem. Finalmente, descrevemos e analisamos, na perspectiva da Socioeducação, a execução de uma atividade de Modelagem Matemática desenvolvida com os alunos.

A Socioeducação e a Modelagem Matemática: possíveis aproximações

Embora todo e qualquer tipo de educação seja eminentemente social, o conceito de socioeducação que aqui tratamos engloba especificamente a aplicação de medidas socioeducativas aos adolescentes em conflito com a lei. A socioeducação, nesse sentido, nasce junto com o Estatuto da Criança e do Adolescente - ECA (Lei 8.069/90) que fundamenta as políticas públicas de atenção à infância e adolescência conforme indicam os documentos do Instituto de Ação Social do Paraná (2006, 2006a, 2007).

Esta perspectiva de socioeducação decorre do princípio legal que fundamenta o ECA de que a proteção e o desenvolvimento da criança e do adolescente deve se

dar de forma integral, contemplando todas as dimensões do ser humano. A socioeducação destaca e privilegia, portanto, a formação para o convívio social e para o exercício da cidadania.

O trabalho socioeducativo, nesse sentido, é uma resposta às premissas legais do Estatuto da Criança e do Adolescente, bem como às demandas sociais do mundo atual. De acordo com Costa (2004), o trabalho socioeducativo se bifurca em duas modalidades: uma, de caráter protetivo é voltada para as crianças e adolescentes em circunstâncias especialmente difíceis em razão da ameaça ou violação de seus direitos; e, a outra, voltada especificamente para o trabalho social e educativo, que tem como destinatários os adolescentes e jovens em conflito com a lei em razão do cometimento de ato infracional.

Nesse segundo caso, o Estatuto da Criança e do Adolescente dispõe que o cumprimento das medidas socioeducativas para adolescentes que praticaram ato infracional deve contemplar objetivos socioeducacionais. Esses objetivos devem garantir a esses adolescentes o acesso às oportunidades de superação de sua condição de exclusão e à formação de valores positivos para participação na vida social.

Além disso, as medidas socioeducativas devem estar voltadas para a preparação de adolescentes e jovens para o convívio social, resgatando-lhes a cidadania. Neste sentido, a finalidade dessas medidas é a preparação para o trabalho visando à formação de profissionais que não reincidam na prática de atos infracionais (crimes e contravenções), assegurando-lhes ao mesmo tempo, o respeito aos seus direitos fundamentais e a segurança dos demais cidadãos.

Para Costa (2004), atingir os objetivos da socioeducação decorre da compreensão de como o ser humano processa sua interação com a realidade. De acordo com esse autor, essa interação ocorre em seis momentos ou etapas: *apreensão da realidade*; *compreensão da realidade*; *significação da realidade*; *projeção da vida no interior da realidade*; *apreciação da realidade e ação frente à realidade*. No Quadro 1 apresentamos a caracterização dessas etapas.

Quadro 1 – Modelo de interação com a realidade

Etapas da interação com a realidade	Característica principal de cada etapa
Apreensão da realidade	O mundo externo vai sendo internalizado pela pessoa por meio de dados, informações, observações, práticas e vivências de todo tipo.
Compreensão da realidade	A pessoa vai perceber os nexos, os enlaces, as relações dos dados, informações, observações, práticas e vivências de modo a ter uma visão mais ampla e complexa do mundo externo.
Significação da realidade	Significar é atribuir valor, (re)significar algo é mudar a valoração, que antes lhe atribuíamos num ou noutro sentido. Os valores constituem a fonte do sentido que atribuímos aos fatos da nossa vida.
Projeção da vida no interior da realidade	Projetar é desdobrar as possibilidades contidas no presente numa linha de tempo, de modo a conferir direção e sentido às nossas ações cotidianas.

Quadro 1 – Continuação...

Apreciação da realidade	A apreciação crítica é uma problematização da realidade. Ela nos indica nossas dificuldades e possibilidades de realização do nosso projeto. Ela permite identificar as variáveis, que contam a favor e aquelas, que atuam de forma contrária à realização do nosso projeto.
Ação frente à realidade	A ação sobre a realidade é o momento culminante do processo de interação da pessoa com o contexto onde se desenvolve a sua vida. É na ação, que o ser humano se define e se realiza. É através da ação que os valores se manifestam e que os projetos se concretizam.

Fonte: Costa (2004) (adaptado)

Considerando esse modelo de interação com a realidade, Costa (1999) já apresentava uma proposta para o trabalho socioeducativo que engloba três práticas básicas: a *docência*, a *vivência* e, principalmente, a *presença educativa*. Docência significa a organização de conhecimentos de diversas naturezas e sua apreensão pelos educandos. Vivências instrutivas envolvem a passagem por atividades estruturantes nas quais o jovem incorpora valores, adquire habilidades e vai assumindo uma nova atitude básica diante da vida. Presença educativa, por sua vez, é o estabelecimento de vínculos humanos de consideração e afeto com pessoas do mundo adulto, que atuam nas unidades socioeducativas ou nos programas de socioeducação.

Essa proposta apresentada por Costa (1999), chamada *Pedagogia da Presença*, articula os princípios da socioeducação para o trabalho efetivo com os adolescentes em conflito com a lei. Para esse autor, a Socioeducação tem que prover oportunidades para os jovens, principalmente oportunidades de analisar situações e tomar decisões diante delas e, exemplifica sua visão de Socioeducação com os versos da música *Aquele Abraço* de Gilberto Gil:

‘Meu caminho pelo mundo eu mesmo traço / a Bahia já me deu régua e compasso. O que é **‘meu caminho pelo mundo’**? Projeto de vida. **‘Eu mesmo traço’**: afirmação da subjetividade do sujeito. **‘A Bahia já me deu régua e compasso’**? Quem é a Bahia? É a educação familiar, escolar, comunitária e pela mídia’ (COSTA, 1999 p. 35).

Ainda que essa proposta de interação com a realidade tenha sido pensada pelos autores para o trabalho socioeducativo, já em 1983 Joseph Schawb (SCHAWB, 1983) argumentava que qualquer evento educativo envolve quatro elementos fundamentais: o aluno, o professor, o conteúdo e o meio ou contexto social. Assim, a organização de atividades de ensino visando à formação integral para além da aprendizagem dos estudantes, tem despertado interesse e orientado discussões em diferentes áreas de conhecimento e, em particular, na Educação Matemática.

Um dos focos dessas discussões diz respeito à Modelagem Matemática, partindo da premissa de que há necessidade de prover os educandos de instrumentos teóricos e hábitos de pensamento em Matemática para lidar com situações-problema oriundas da sua realidade social e cultural.

Mas, o que significa fazer Modelagem Matemática? Nosso entendimento de Modelagem Matemática está apoiado na caracterização de Blum (2002), de que uma atividade de modelagem se constitui a partir de uma situação-problema visando obter uma solução por meio da Matemática. Nesse sentido, a modelagem está sintonizada com a ideia de que:

[...] a razão pela qual todos os seres humanos devem aprender matemática é que ela fornece um meio para a compreensão do mundo que nos rodeia, para lidar com os problemas cotidianos, ou de preparação para futuras profissões. Ao lidar com a questão de como os indivíduos adquirem o conhecimento matemático, não podemos ignorar o papel de relações com a realidade, especialmente a relevância da aprendizagem situada (incluindo o problema da dependência de contextos específicos). A questão geral sobre o que, afinal, é 'matemática', considera parte da nossa cultura, fenômenos sociais, ideias sobre como a matemática surgiu e se desenvolveu, apontando também para "aplicações" da matemática em outras disciplinas, na natureza e na sociedade. (BLUM, 2002, p. 151)

Segundo Almeida e Ferruzzi (2009)

[...] a atividade de Modelagem se configura como uma atividade que, para os envolvidos na atividade, implica em um conjunto de ações como a busca de informações, a identificação e seleção de variáveis, a elaboração de hipóteses, a simplificação, a obtenção de uma representação matemática (modelo matemático), a resolução do problema por meio de procedimentos adequados e a análise da solução que implica numa validação, identificando a sua aceitabilidade ou não (p.120 e 121).

Embora tais ações não aconteçam seguindo uma ordem determinada, geralmente, o ponto de partida consiste em um problema a ser investigado. Segue-se então a busca e/ou coleta de informações que viabilizem essa investigação. A partir de então, os alunos elencam hipóteses que norteiam toda a resolução, desde a realização de simplificações até a obtenção de uma conclusão para o problema e a comunicação dos resultados, passando pela construção de um modelo matemático da situação.

O modelo matemático, por sua vez, é uma representação simplificada da realidade sob a ótica daqueles que a investigam (KEHLE; LESTER, 2003). Segundo Lesh (2010), um modelo matemático é um sistema conceitual, descritivo ou explicativo, expresso por meio de uma linguagem ou uma estrutura matemática, com a finalidade de descrever o comportamento de outro sistema e permitir a realização de previsões sobre este outro sistema. Ainda de acordo com o autor, é possível que o modelo construído para representar uma situação num dado momento sirva, também, para representar outro sistema em um momento posterior.

Essa perspectiva para o ensino de matemática mediado por problemas da realidade, interdisciplinares, demanda um processo de formação no qual o indivíduo seja exposto a situações de aprendizagem que o estimulem a pensar, questionar, conhecer o contexto histórico e diferentes pontos de vista e a estabelecer relações entre a Matemática e aquilo que está aprendendo.

Neste contexto, Jacobini (2004) apontou a importância e contribuição da Educação Matemática para o desenvolvimento de políticas públicas que visam colaborar com programas de recuperação e inserção social de menores infratores. A pesquisa do autor mostrou como um grupo de alunos voluntários e participantes de

um projeto de modelagem conseguiu estender os objetivos do projeto além da sala de aula ao se envolver com trabalhos pedagógicos com adolescentes do Centro de Orientação ao Menor de Campinas (COMEC).

Assim, as considerações que apresentamos e em que delineamos aspectos centrais da Socioeducação e da Modelagem Matemática nos encorajam a propor um quadro comparativo de quatro pontos de possível aproximação entre esses dois conceitos. Esses pontos são: o encaminhamento metodológico dessas duas propostas, os objetivos educacionais em ambas, o valor do conhecimento sistematizado e o papel do educando em cada uma delas.

Quadro 2 – Quadro comparativo da Socioeducação com a Modelagem Matemática

	Socioeducação	Modelagem Matemática
Encaminhamento metodológico	Parte da interação do educando com a realidade e engloba a apreensão, compreensão, significação, projeção da vida, apreciação e ação frente à realidade. (COSTA, 1999)	Parte da escolha de um tema e identificação do problema; segue com a seleção de variáveis, formulação de hipóteses, obtenção e avaliação do modelo matemático. (BLUM, 2002; ALMEIDA; FERRUZZI, 2009; ALMEIDA, 2010)
Objetivos de aprendizagem	Desenvolver a habilidade de ponderar situações, analisar problemas, trabalhar em grupo, planejar, liderar, tomar decisões, avaliar, ser avaliado, de relacionar-se com outros, de atribuir valor às suas decisões e, o mais importante, saber ser e conviver, resolvendo os conflitos de forma pacífica. (COSTA, 2004)	Prover os educandos de instrumentos teóricos e hábitos de pensamento em Matemática para lidar com situações-problema oriundas da sua realidade social e cultural. (BASSANEZI, 2002)
Sistematização do conhecimento	Compreensão do mundo parte do conhecimento acumulado decorrente da inserção social do sujeito e amplia-se com novos conhecimentos instrumentalizando-o para uma nova prática social. (COSTA, 1999)	Tabelas, relações funcionais, gráficos, figuras geométricas, equações, fórmulas, expressões algébricas, etc., são exemplos de modelos matemáticos que permitem representar e compreender a realidade. (LESH, 2010)
Papel do Educando	A ação socioeducativa é desenvolvida no sentido de criar situações que permitam ao adolescente manifestar suas potencialidades, suas capacidades e possibilidades concretas de crescimento pessoal e social. (COSTA, 2004a)	O desenvolvimento de atividades de Modelagem Matemática requer dos alunos fazer escolhas, situar-se no seu ambiente sociocultural, adquirir autonomia, aplicar de forma criativa o conhecimento matemático e propor modificações sobre a realidade (BLUM, 2002; ALMEIDA; BRITO, 2005).

Essas aproximações, em sintonia com a assertiva de Blum (2002), reforçam a ideia de que aprender é um fenômeno que, ainda que idiossincrático, diz respeito

ao estabelecimento de relações entre o ambiente, os meios de aprendizagem e os objetos aprendidos.

Considerando estas possíveis aproximações é que desenvolvemos atividades de Modelagem Matemática com adolescentes de um Centro de Socioeducação.

O CENSE, os adolescentes e as aulas de Matemática

O Centro de Socioeducação (CENSE) é uma instituição mantida pelo governo do estado da Paraná e destinado à internação de adolescentes em cumprimento de medidas socioeducativas. Essas medidas socioeducativas, previstas no Estatuto da Criança e do Adolescente são aplicadas pelo juiz da Vara da Infância e Juventude e, nessa instituição, ficam internados os adolescentes que cumprem medida socioeducativa de restrição de liberdade. Esses adolescentes ficam no CENSE, acomodados em alojamentos, as chamadas alas, e saem desses alojamentos apenas acompanhados pelos educadores sociais.

Além dos educadores sociais, os adolescentes com restrição de liberdade recebem assistência de psicólogo, assistente social, psicopedagoga e são compulsoriamente matriculados nas disciplinas curriculares para garantir o direito à educação formal.

As aulas ofertadas no CENSE são organizadas, pensando em primeiro lugar, na segurança de todas as pessoas que ali estão. Todos os materiais utilizados pelos alunos, por exemplo: lápis, réguas, canetas, borracha, pincéis, entre outros, são cuidadosamente contados na entrada e saída da sala de aula. Tesoura com ponta, estilete, compasso ou qualquer outro material que colocam em risco a segurança são expressamente proibidos.

A modalidade de educação oferecida no CENSE é Educação de Jovens e Adultos (EJA). Nessa modalidade, os alunos são matriculados nas disciplinas e concluem essas disciplinas quando atingirem a carga horária exigida ou cumprirem os chamados módulos de estudo. Cada módulo engloba um conjunto de conteúdos.

Em particular, os alunos que realizaram as atividades de Modelagem Matemática relatadas neste texto estavam matriculados em Matemática e em até outras três disciplinas (não necessariamente as mesmas). Cada disciplina atendia aos alunos em grupos de até cinco pessoas por um período de 3h30min (quatro aulas por período). Em Matemática os alunos tinham dois encontros por semana, sendo cada encontro de quatro aulas seguidas (3h30min) com um intervalo de 15 minutos.

Esses alunos pertenciam a duas turmas de Ensino Fundamental cada uma com cinco alunos. Ao longo do desenvolvimento das atividades três alunos foram desinternados e outros três foram matriculados em Matemática, de modo que se mantiveram sempre dez alunos.

Eram turmas multisseriadas, ou seja, cada aluno matriculava-se na disciplina de Matemática num módulo correspondente a uma série específica no ensino regular. Na realização das atividades de Modelagem Matemática, porém, os alunos trabalharam coletivamente nas mesmas atividades que envolviam os mesmos conteúdos de geometria.

Considerando as normas da instituição, durante as aulas não podiam ser realizadas filmagens ou gravações e os alunos também não podiam ter acesso à internet. Deste modo, nossas argumentações neste texto vêm subsidiadas nos registros escritos produzidos pelos alunos durante o desenvolvimento das atividades, nos

materiais que construíram, nas nossas anotações em diário de campo e nas conversas tidas com os alunos durante as aulas.

As atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas

As atividades de Modelagem Matemática foram organizadas para serem realizadas por encontros. Todas as atividades foram realizadas em oito encontros. Cada encontro corresponde a 4 aulas ou um período de 3,5 horas. Cada encontro aconteceu no período todo da manhã ou da tarde ao longo de quatro semanas, duas semanas do final de novembro e duas no começo de dezembro de 2012. No dia 18 de dezembro, os alunos das duas turmas apresentaram o trabalho de Modelagem Matemática para toda a comunidade.

Como o trabalho foi desenvolvido com duas turmas, foram dois encontros com cada uma dessas turmas, totalizando quatro encontros por semana. As mesmas atividades de Modelagem Matemática foram desenvolvidas nas duas turmas. E, por isso, não diferenciamos ao longo deste texto uma turma da outra. Ao longo do texto em que relatamos o desenvolvimento das atividades indicamos nossa presença na realização das atividades como *professor*, sendo este o primeiro autor do presente artigo.

As atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em cada encontro foram organizadas levando em conta que os alunos deveriam ser gradativamente familiarizados com essa proposta de ensino. Devido, principalmente, a questões de segurança, a indicação dos supervisores da instituição é de cada atividade deve ser organizada com antecedência. Assim, planejamos as ações de cada encontro visando também encaminhá-las para bom aproveitamento do tempo e garantir a qualidade no trabalho final a ser apresentado pelos alunos.

Todas as etapas das atividades de Modelagem Matemática foram desenvolvidas coletivamente com a participação do professor, tais como: a sugestão do tema, orientação na coleta de dados, auxílio na obtenção dos modelos matemáticos e discussão sobre as demonstrações para validação dos modelos. Neste sentido, a caracterização para atividades de Modelagem Matemática apresentada por Blum (2002) está alinhada com a configuração dessas atividades uma vez que a atividade se constituiu a partir de uma situação-problema visando obter uma solução por meio da Matemática.

Na escolha do tema, por exemplo, conversamos com os alunos e combinamos que eles poderiam escolher qualquer assunto de seu interesse, desde que a coleta de dados pudesse ser feita utilizando o Google Earth. Essa restrição foi feita, pois as fotografias áreas obtidas no Google Earth e algumas ferramentas desse *software*, tais como régua, escala, elevação de terreno e inserção de polígonos, conduzem a problemas de otimização de distâncias, áreas e perímetros de figuras planas, englobando os conteúdos de geometria que deveríamos ensinar.

Várias sugestões foram apresentadas pelos alunos, considerando espaços públicos da cidade de Londrina: a pista do *Autódromo Internacional Airton Senna*, o telhado do *Museu Histórico Padre Carlos Weiss*; a *Rodoviária Celso Garcia*; a rotatória com maior número de acidentes; os reservatórios elevados de água (caixas d'água), praças da cidade, entre outras.

Dentre essas sugestões a decisão conjunta dos alunos foi de estudar algumas praças públicas. Apoiamos também fortemente a escolha do tema *Praças públicas de Londrina* porque, segundo Macedo e Robba (2002), na elaboração de um projeto de praça, diversos problemas de otimização podem ser abordados: minimização de custos com material de construção; minimização do comprimento dos caminhos que interligam os acessos; maximização das áreas reservadas para canteiros; maximização de espaços de lazer; entre outros, mostram que a escolha desse tema se mostrou adequada para abordar problemas de otimização geométrica via Modelagem Matemática.

A partir dessa discussão sobre praças, surgiu a proposta de *tirar* as medidas da *Praça Rocha Pombo*³ e fazer uma maquete para apresentar num evento de final da disciplina de Matemática. Sugerimos, então, ampliar para o estudo das praças públicas da cidade. A ideia de elaborar um projeto para reformar a Praça Rocha Pombo e concretizar esse projeto numa grande maquete a ser confeccionada ao longo das aulas motivou fortemente os alunos para escolha desse tema.

A coleta de dados foi feita medindo distâncias em imagens de praças públicas, extraídas do Google Earth e impressas em folha de papel sulfite, considerando que estes alunos não têm acesso à internet permitido. As praças escolhidas foram: Praça Raul Soares de Belo Horizonte, Praça do Jardim Botânico de Curitiba, Praça do Triângulo em Goiânia, Praça Rocha Pombo em Londrina e Praça da República em São Paulo. A experimentação, o levantamento de hipóteses foram feitos a partir da análise das medidas obtidas das imagens dessas praças, objetivando a abordagem de problemas de otimização em geometria. O modelo matemático nesse caso era uma construção geométrica que possibilitasse a otimização de alguma medida da praça em estudo.

A validação desses modelos (construções geométricas) foi feita solicitando aos alunos que justificassem as passagens utilizadas nessas construções. A validação, nesse caso, equivale à obtenção de uma demonstração para as afirmações e hipóteses subjacentes às construções geométricas exibidas como modelo matemático.

O desenvolvimento das atividades de Modelagem Matemática manteve a preocupação constante com os objetivos de aprendizagem, o cuidado com o tratamento adequado aos conteúdos de geometria e a coerência na utilização de instrumentos de avaliação. A tabela 1 apresenta as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas em cada encontro, assim como os respectivos objetivos de aprendizagem.

3 Essa praça, inaugurada na década de 1950, foi construída no centro de Londrina-PR, Brasil, entre a estação rodoviária (hoje Museu de Arte) e a estação ferroviária (hoje Museu Histórico).

Tabela 1 – Atividades de Modelagem Matemática e seus objetivos de aprendizagem matemática

Atividades de Modelagem Matemática	Objetivos de Aprendizagem
Praças no Google Earth	Reconhecer formas geométricas em praças; Utilizar a legenda de escala das imagens do Google Earth para resolver problemas; Formular problemas de otimização.
Caminho mínimo entre dois pontos de uma praça	Medir medidas de distâncias e ângulos; Construir figuras simétricas utilizando reflexão; Reconhecer ângulos opostos pelo vértice; Resolver e utilizar o Problema de Heron.
Caminho mínimo entre os lados de uma praça triangular	Medir distâncias e ângulos; Construir figuras simétricas utilizando reflexão; Reconhecer a propriedade de reflexão do triângulo órtico; Resolver e utilizar o Problema do triângulo de Schwarz.
Caminho mínimo entre os lados de uma praça em quadrilátero.	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Construir figuras simétricas utilizando reflexão; Utilizar o método de reflexão; Reconhecer condições para existência de solução para os problemas.
Localização do chafariz numa praça triangular	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Utilizar rotações na resolução de problemas; Reconhecer condições do ponto de mínimo; Resolver e aplicar o problema de Fermat-Steiner.
Localização do chafariz numa praça retangular	Realizar medidas de distâncias e ângulos; Obter o ponto de Fermat utilizando simetria; Reconhecer redes de Fermat; Utilizar o problema de Fermat-Steiner para obter experimentalmente pontos de mínimo.
Otimização de canteiros	Resolver problemas isoperimétricos simples; Reconhecer condições em que polígonos com perímetro dado tenham área máxima.
Projeto e confecção da maquete da praça	Elaborar um projeto de praça aplicando os conhecimentos adquiridos; Avaliar projetos de praças; Apresentar o trabalho realizado, justificando as escolhas.

A Socioeducação nas atividades de Modelagem Matemática

As restrições ao uso de procedimentos de coleta de dados, como gravações em áudio e vídeo e a realização de entrevistas, restringem nossas inferências sobre

aproximações entre Socioeducação e Modelagem Matemática usando os registros dos alunos, cartazes e maquetes construídas bem como anotações em diário de campo que realizamos durante o desenvolvimento das atividades.

Olhar para as atividades de Modelagem Matemática com as lentes da Socioeducação significa buscar nas ações, reações, anotações e produções dos adolescentes indícios de aprendizagem que, para além da matemática, revelem sinais de bom convívio social, de exercício de cidadania e de intenção de reingresso na sociedade.

Assim, o encaminhamento metodológico indicado pela socioeducação prevendo a interação dos adolescentes privados da liberdade com a realidade e de ação frente a ela, em certa medida, está alinhado com o encaminhamento das atividades de modelagem. Realizar um estudo sobre as praças da cidade em que moram, fazendo indicações sobre seu *design* e seu uso pela população, ao mesmo tempo em que mantém os internos ligados à vida das pessoas, também os faz desenvolver atitudes de respeito e interesse de retorno ao convívio social.

O trabalho cooperativo entre os estudantes e seus pares e entre professor e estudantes proporcionado pelas atividades de Modelagem Matemática requer dos alunos a habilidade de ponderar, de planejar, de tomar decisões em grupos e de tratar de forma pacífica possíveis conflitos de ideias.

No caso das atividades desenvolvidas pelos adolescentes internados no Centro de Socioeducação em ambiente fechado, eles tiveram oportunidade de exercitar essas habilidades, além de aprender matemática lidando com conceitos e procedimentos que lhes viabilizou um exercício de pensamento geométrico aliado a um contexto real.

Como os alunos não tinham possibilidade de coletar dados, no primeiro encontro apresentamos a eles imagens aéreas impressas, obtidas no Google Earth, de praças públicas e solicitamos que identificassem as semelhanças e diferenças visíveis entre elas. Com isso, os alunos puderam reconhecer as formas geométricas, identificando os elementos característicos de uma praça, tais como: canteiros, chafariz, espelhos d'água, organização dos caminhos de acesso, mobiliários, etc.

Levando em consideração indicações de Martin e Linda (2010), chamamos também a atenção dos alunos para observarem a barra de escala nas imagens das praças. Barra de escala (ou legenda de escala) é um segmento de reta que aparece nas imagens aéreas do Google Earth, indicando a relação entre o tamanho da imagem e o tamanho do objeto real, ou seja, a barra indica a escala com a qual os objetos aparecem representados na imagem.

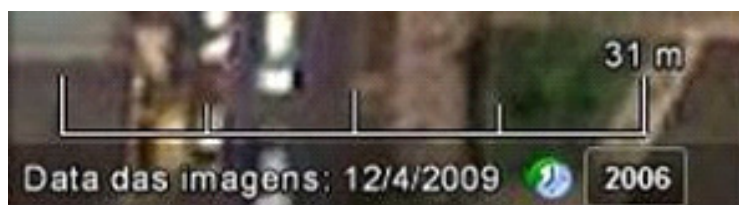


Figura 1 – Barra de escala ou legenda de escala da Praça Rocha Pombo

Escala, por sua vez, é uma razão entre duas grandezas expressas na mesma unidade de medida. A escala da imagem da praça pode ser expressa verbalmente (cada 1 cm de comprimento na imagem vale 645 cm de comprimento praça real), ou na forma de fração, $\frac{1}{645}$, ou na forma decimal.

A partir dessa explicação, convidamos os alunos a obterem a escala das imagens das cinco praças. Medindo com régua o comprimento da legenda da escala e anotando o valor real correspondente, os alunos obtiveram, por exemplo, a escala para a imagem da Praça Rocha Pombo: $\frac{4,8}{100}$, ou seja, $\frac{4,8}{3100}$, como o comprimento da barra é 4,8 cm e o valor real correspondente é 31 metros, então cada 4,8 cm na imagem correspondem a 3100 cm na praça.

A partir disso os alunos converteram escalas obtidas das praças em frações da unidade, ou seja, em que o numerador é 1. A escala da *Praça Rocha Pombo*, por exemplo, representada por $\frac{4,8}{3100}$ ou, com um arredondamento, $\frac{1}{645}$. Frações da unidade são boas representações para escala, pois para saber o comprimento real da largura da *Praça Rocha Pombo*, por exemplo, basta multiplicar seu comprimento na imagem por 645.

Com as escalas convertidas em frações da unidade, foram obtidas as seguintes medidas reais das praças: comprimento dos caminhos internos, comprimento do caminho perimetral, área e perímetro dos canteiros e área e perímetro total das praças. A figura 2 mostra a atividade dos alunos com as medidas da praça Rocha Pombo.



Figura 2 – Painel com as medidas obtidas da Praça Rocha Pombo

Propomos aos alunos, em seguida, que apontassem possíveis melhorias na *Praça Rocha Pombo*. Com isso, convidamos os alunos a elaborar um projeto para reforma e revitalização dessa praça e, com esse projeto, fazer uma maquete para apresentação ao final das aulas de Matemática. As ações dos alunos nessa atividade foram mediadas pelas questões:

Que fatores influenciam no uso e manutenção de uma praça pública?

Como a forma geométrica dos elementos de uma praça e sua distribuição espacial afetam seu uso e conservação?

Como a forma e o comprimento total da rede de caminhos que interligam os diversos pontos de uma praça influenciam no seu uso e conservação?

Como a relação entre os tamanhos das áreas verdes, jardins e gramas, e o tamanho das áreas de circulação de pessoas pode influenciar no uso e conservação de uma praça pública?

A partir dessas discussões os alunos chegaram ao consenso de que a forma e o tamanho de canteiros e caminhos de circulação de pessoas podem contribuir para a conservação de praças. Caminhos muito longos de um ponto a outro da praça

podem estimular os visitantes a andar sobre os canteiros, desrespeitando as famosas plaquinhas de *Não pise na grama!*. Muito espaço para circulação de pessoas e pouco para vegetação pode acarretar desconforto térmico e cria excesso de áreas impermeáveis dificultando o escoamento das águas de chuva.

Portanto, ficou decidido que no projeto de revitalização da praça, os alunos deveriam apresentar uma rede de caminhos do passeio público com comprimento mínimo, e exibir formas para os canteiros e áreas verdes com a maior área possível e perímetro mínimo. Assim, dois problemas foram apontados: primeiro, encontrar soluções para minimizar a rede de caminhos que interligam os diversos pontos da Praça Rocha Pombo; e, segundo, melhorar a relação entre áreas verdes e áreas de circulação de pessoas.

A busca por soluções para esses dois problemas foi oportunidade para que conhecimentos matemáticos novos fossem desenvolvidos. Para resolver esses dois tipos de problemas, ao longo dos outros sete encontros foram abordados problemas clássicos de otimização geométrica apresentados em Coxeter (1969) e em Figueiredo (1989): problema de Heron, problema de Fagnano-Schwarz, problema de Fermat-Steiner e problema Isoperimétrico.

A enunciação de cada um desses problemas e a questão a eles associada nas atividades de Modelagem Matemática se configuram conforme indica o quadro 3.

Quadro 3 – Problemas geométricos abordados e seus respectivos enunciados

Problema de Otimização	Enunciado em termos geométricos	Enunciado em termos de Modelagem Matemática
Problema de Heron	Seja uma reta l e dois pontos A e B localizados no mesmo lado de l . Determine um ponto P sobre l de tal forma que a soma $AP + BP$ seja a menor possível.	Qual é o caminho mais curto para, num passeio, uma pessoa ir de um ponto a outro de uma praça, passando antes por um dos lados dessa praça?
Problema de Fagnano-Schwarz	Dado um triângulo acutângulo ABC , inscrever nele o triângulo PQR , com o menor perímetro possível.	Qual é o trajeto mais curto que interliga todos os lados de uma praça?
Problema de Fermat-Steiner	Dados três pontos não colineares A , B e C localizados num mesmo plano, determine um ponto P desse mesmo plano de modo que a soma $PA + PB + PC$ seja a menor possível.	Onde construir o chafariz numa praça para que a soma das distâncias desse chafariz até os pontos de acesso da praça seja a menor possível?
Problema isoperimétrico	Dado um polígono F_1 não convexo, mostre que sempre é possível encontrar outro polígono F_2 com número de lados menor, perímetro menor e área maior.	Que forma geométrica deve ter os canteiros para que tenham área máxima e perímetro mínimo?

O estudo desses problemas ocorreu a partir da observação, medição construções geométricas efetuadas sobre imagens de diversas praças públicas retiradas do Google Earth, permitindo que os alunos construíssem conhecimentos suficientes

em geometria para elaborar o projeto de reforma e revitalização da Praça Rocha Pombo.



Figura 3 – Maquete da atual praça Rocha Pombo

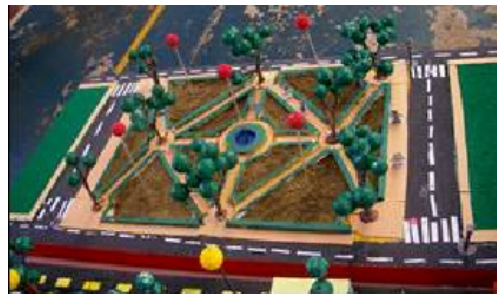


Figura 4 – Maquete da praça incorporando sugestões dos alunos

As figuras 3 e 4 mostram as maquetes da Praça Rocha Pombo atual e essa mesma praça feita a partir do projeto elaborado pelos alunos. Os caminhos que interligam os diversos pontos dessa praça foram planejados utilizando-se de propriedades geométricas que tornam seu comprimento total mínimo. Além disso, vários canteiros dessa praça são triângulos isósceles e alguns são *quase regulares* que caracteriza uma propriedade isoperimétrica dos triângulos para que tenham área máxima.

Além dessas duas maquetes, os alunos também apresentaram os problemas de otimização geométrica e suas respectivas resoluções por meio de painéis. As fotografias apresentadas na figura 5 mostram como foram dispostos os painéis para a apresentação dos trabalhos dos alunos para a comunidade CENSE, envolvendo internos, funcionários, professores e pais.



Figura 5 – Organização e apresentação dos painéis

Com estas atividades de Modelagem Matemática os adolescentes internados no CENSE aprenderam conteúdos de geometria, tais como: área de regiões planas, comprimento e distância, simetria, etc., além de lidar com ideias ligadas a outras disciplinas, tais como: sustentabilidade, acessibilidade, estética, urbanismo, paisagismo, ecologia.

Outro fato importante foi que ao longo da realização das atividades nem os alunos e nem o professor referiam-se aos problemas de otimização abordados como sendo problemas da Matemática ou problemas da Geometria. Nas conversas que

realizamos com os alunos cada problema era tratado como um problema relacionado à elaboração de um projeto de praça pública.

Em todos os encontros, os alunos utilizavam sua própria experiência para discutir aspectos dos problemas abordados. Esses alunos manifestaram, por exemplo, que as praças públicas deveriam ter atrativos, tais como academia de ginástica, brinquedos para as crianças, pista de skate, acesso grátis a internet pelo wi-fi e contar com muitos eventos, como shows, teatros, etc., para manter o interesse da população em conservar as praças. Chafariz, espelho d'água são coisas que, segundo os alunos, não atraem mais as pessoas.

Os conhecimentos prévios dos alunos também foram importantes para que compreendessem a natureza dos problemas abordados. Problemas que envolvem obter um caminho de comprimento mínimo ou um canteiro de área máxima são perfeitamente compreensíveis para alunos, mesmo com pouco ou nenhum conhecimento formal em geometria.

A utilização das imagens aéreas do Google Earth para abordar conteúdos de Geometria também foi um fator de motivação para a aprendizagem. De fato, os alunos conhecem e gostam desse tipo de tecnologia, pois as imagens do Google Earth tornaram mais plausíveis os problemas estudados, permitindo explorar os conteúdos de uma forma mais realista.

As justificativas e argumentações apresentadas nos painéis pelos alunos mostraram a importância do que Nelsen (2000) caracteriza como *demonstrações visuais*, ou seja, construções geométricas que auxiliam na percepção das propriedades geométricas empregadas na resolução de cada problema. Utilizar termos como deslizar, refletir, girar, recortar, mover, colar, recolocar, alinhar, sobrepor, reagrupar, decompor, etc. foi bastante natural para os alunos no contexto dessas *demonstrações visuais*.

Assim, no que se refere ao papel do educando nessas atividades, vale considerar que estes alunos tiveram a oportunidade de mostrar suas potencialidades, de fazer escolhas, de tomar decisões, em sintonia com indicativos da socioeducação. Neste sentido, as etapas de interação com a realidade indicadas por Costa (2004) bem como a aprendizagem matemática mediada por essa interação conforme defende Blum (2002), a que nos referimos em seção anterior, foram se configurando em alguma medida para esses alunos. A apreensão da realidade, em que um mundo externo é acessado por meio do Google Earth, foi seguida de etapas de compreensão e apreciação, culminando com a clara ação de fazer indicativos para o *design* de uma praça que, antes da fase de privação de liberdade em que hoje se encontram, era conhecida por todos os adolescentes que participaram das atividades.

Finalmente, o desenvolvimento de uma atividade de Modelagem Matemática culmina com a comunicação de uma resposta do problema para outros. Esta comunicação implica essencialmente em desenvolver uma argumentação que possa convencer aos próprios estudantes e àqueles aos quais estes resultados são acessíveis, neste caso a comunidade do CENSE e pais de alunos, que a solução apresentada satisfaz. Nesta ação o aluno necessita expor para outros o julgamento do valor de teorias e métodos, apresentar e justificar suas escolhas baseadas em argumentos racionalmente fundamentados, reconhecer que a situação requer alguma subjetividade. Neste sentido, o resgate da cidadania, do respeito, são aspectos que, indicados pela Socioeducação, podem ser fortalecidos com atividades de Modelagem Matemática.

Considerações finais

Considerando o nosso objetivo de pesquisa de estruturar uma aproximação entre Modelagem Matemática e Socioeducação, por um lado, as ponderações que organizamos no quadro 1 fornecem indicativos de que, pelo menos do ponto de vista teórico, atividades de modelagem têm potencial para promover a socioeducação. Por outro lado, a experiência desenvolvida com os adolescentes privados de liberdade vem ratificar essa nossa conjectura.

De fato, a análise empreendida sobre os alunos, suas atividades e suas relações com os colegas, o professor e a comunidade do CENSE, nos permite alinharmos com as assertivas de Gómez-Granell (1997) enfatizando que, a construção social do conhecimento é produzida mediante as interações entre professor e aluno, experimentando, compartilhando, confrontando, argumentando, convencendo, debatendo e negociando. Para os autores, é no conflito gerado pelas interações que os estudantes observam as semelhanças e diferenças de opiniões na resolução de um problema, o que vem se confirmar na etapa experiencial da nossa pesquisa.

No que se refere aos conteúdos, ao longo da realização das atividades, ainda que professor e alunos não se referissem aos problemas como problemas de Matemática, mas sim como situações-problema que seriam analisadas usando Matemática, os conteúdos que emergiam ou que se faziam necessários, puderam ser sistematizados e, sempre que necessário, anotações, conceitos, cálculos e/ou propriedades eram referenciados. Nas conversas que realizamos com os alunos cada problema era tratado como um problema relacionado à elaboração de um projeto de praça pública. Finalmente, as justificativas e argumentações apresentadas nos painéis pelos alunos mostraram a importância das demonstrações visuais, ou seja, construções geométricas que auxiliam na percepção das propriedades geométricas empregadas na resolução de cada problema. Assim, as atividades de modelagem favoreceram a abordagem e a sistematização de conceitos, de propriedades geométricas, fundamentais da Matemática a partir de situações não matemáticas.

Neste sentido, docência, vivência e presença educativa, são práticas que conviveram durante o desenvolvimento das atividades, em sintonia com a proposição de Costa (1999) a que nos referimos. Por outro lado, as ações associadas ao desenvolvimento de atividades de modelagem foram vivenciadas pelos alunos, indicando que um fazer pode conduzir a um saber.

Olhando para as atividades de Modelagem Matemática desenvolvidas com os óculos da Socioeducação, podemos argumentar que a inclusão de atividades desse tipo, ao mesmo tempo em que favorece a aprendizagem dos alunos, também os integra em um universo de ações que favorecem a sua reintegração na sociedade.

Assim, considerando a assertiva de Morin de que “a história da ciência é feita de migração de conceitos...” (MORIN, 1995, p. 169), podemos inferir que Socioeducação e Modelagem Matemática, são conceitos que, em determinadas situações, se não são equivalentes, pelo menos se complementam, se integram. É dessa integração que se beneficia, se fortalece a educação, a formação de alunos em diferentes circunstâncias educacionais. No caso específico do nosso artigo esta circunstância é o ensino no CENSE.

Referências

- ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké**. *Campinas*, v. 18, número temático, p. 387-414, 2010.
- ALMEIDA, L. M. W.; FERRUZZI, E. C. Uma aproximação socioepistemológica para a modelagem matemática. **Alexandria** (UFSC), v. 2, p. 117-134, 2009.
- ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir? **Ciência e Educação** (UNESP), v. 11, 2005, p. 1-16.
- BASSANEZI, R. C. **Ensino-aprendizagem com modelagem matemática**. São Paulo: Contexto, 2002.
- BLUM, W. ICMI study 14: applications and modeling in mathematics education – discussion document. **Educational Studies in Mathematics**, v. 51, 2002, p. 149–171.
- COSTA, A. C. G. da. **Pedagogia da presença: da solidão ao encontro**. Belo Horizonte, MG: Modus Faciendi, 1999.
- COSTA, A. C. G. da. **As bases éticas da ação sócio-educativa**. Manuscrito impresso. Belo Horizonte, MG: abril/2004.
- COSTA, A. C. G. da. – **Sócio-educação – Estrutura e funcionamento de uma comunidade educativa**. Manuscrito impresso – Belo Horizonte, MG: abril/2004a.
- COXETER, H. S. M. **Introduction to geometry**. New York: John Wiley and Sons, 1969.
- FIGUEIREDO, D. G. Problemas de máximo e de mínimo na geometria euclidiana. **Matemática Universitária**, Rio de Janeiro, 9/10, 1989, p. 69-108.
- GÓMEZ-GRANELL, C. Linguagem matemática: símbolo e significado. In: TEBEROSKY, A.; TOLCHINSKI, L. (Orgs.) **Além da alfabetização**. Trad. Stela Oliveira. São Paulo: Ática, 1997.
- INSTITUTO DE AÇÃO SOCIAL DO PARANÁ. Cadernos do IASP: **Compreendendo o adolescente**. Curitiba, PR: Imprensa Oficial do Estado, 2006.
- INSTITUTO DE AÇÃO SOCIAL DO PARANÁ. **Estatuto da criança e do adolescente**. Curitiba, PR: Imprensa Oficial do Estado, 2006a.
- INSTITUTO DE AÇÃO SOCIAL DO PARANÁ. Cadernos do IASP: **Práticas de Socioeducação**. Curitiba, PR: Imprensa Oficial do Estado, 2007.
- JACOBINI, O. R. **A modelagem matemática como instrumento de ação política na sala de aula**. 2004. 225f. Tese (Doutorado em Educação Matemática) - Universidade Estadual Paulista Júlio de Mesquita Filho, UNESP, Brasil, 2004.
- KEHLE, P.; LESTER, F. K. Jr. A semiotic look at modeling behavior. In: LESH, D.; DOERR, H. Beyond constructivism: **Models and Modeling Perspectives on Mathematics Problem Solving, Learning, and Teaching**. Hillsdale, N.J.: Erlbaum, 2003, p.97-122.
- LESH, R. Tools, Researchable Issues & Conjectures for investigating what it means to Understand Statistics (or Other Topics) Meaningfully. **Journal of Mathematical Modelling and Application**, v.1, n. 2, 2010, p.16-48.
- MACEDO, S. S.; ROBBA, F. **Praças brasileiras**. São Paulo: Edusp, 2002
- MARTIN C. R.; LINDA, C. C. Map Scale, Proportion, and Google Earth. **Mathematics Teaching in Middle School**, Vol. 15, No.8, April 2010.
- MORIN, E. **Introdução ao pensamento complexo**. Trad. Maria Gabriela de Bragança. 2ed. Lisboa: Instituto Piaget, 1995.
- NELSEN, R. B. *Proofs without words II - Exercises in visual thinking*. **The Mathematical Association of America**, 2000.
- SCHWAB, J. J. The practical 4: Something for curriculum professors to do. **Curriculum Inquiry**, 13(3), 1983, p.239-265.