

# O uso de um jogo de treinamento no ensino dos conceitos de média e variância

The use of a training game in the teaching of the concepts of mean and variance

José Marcos Lopes<sup>1</sup>

Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, UNESP, Brasil

## Resumo

Apresentamos, neste artigo, o relato de uma experiência de ensino que utilizou, em sala de aula, um jogo de dados, para o reforço no aprendizado dos conceitos de média e variância. O jogo é original e utiliza, simultaneamente, esses dois importantes conceitos da Estatística Descritiva. Formulamos também alguns problemas, envolvendo situações de jogo, cujas soluções, obtidas pelos próprios alunos, têm por objetivo reforçar os conceitos matemáticos presentes nas definições de média e de variância. Pelos relatos dos alunos e das professoras que aplicaram o jogo, acreditamos que a atividade desenvolvida tenha contribuído para a apreensão dos conceitos de média e variância pelos alunos. Esperamos que a sequência didática aqui apresentada possa auxiliar o professor do Ensino Médio no seu trabalho com esses conceitos.

**Palavras-chave:** Ensino de Estatística, Jogos, Resolução de problemas.

## Abstract

In the present study, we describe a classroom teaching experience with a dice game to reinforce the learning of the concepts of mean and variance. The game is an original proposal and uses these two important concepts of Descriptive Statistics. We have also formulated some problems involving game situations. The solutions of these problems, obtained by the students, are intended to reinforce the mathematics concepts present in the definitions of mean and variance. Based on the reports of the students and teachers that applied the dice game, we believe that the activity contributed for the learning of the concepts of means and variance by the students. Therefore, we hope that the didactics sequence presented herein can help high school teachers in their work with these concepts.

Keywords: Teaching statistics, Games, Problem solving.

## Introdução

Nos dias atuais, parece inquestionável a importância do estudo de conceitos da Estatística pelos alunos da educação básica. No Brasil, os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL, 1998) recomendam o estudo desses conceitos a partir do primeiro ciclo (1<sup>a</sup> e 2<sup>a</sup> séries) do Ensino Fundamental.

Especificamente sobre as medidas de posição e dispersão, os PCN (BRASIL, 1997, p. 90) estabelecem como conteúdo conceitual para o segundo ciclo (3<sup>a</sup> e 4<sup>a</sup> séries) a

1 Licenciado em Matemática pela Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho” - IBILCE/UNESP - São José do Rio Preto, mestre em Ciências de Computação e Estatística pelo Instituto de Ciências Matemáticas de São Carlos - ICMSC/USP - São Carlos, doutor em Teoria do Controle e Estatística pela Pontifícia Universidade Católica do Rio de Janeiro - PUC/RJ. Atualmente é professor Livre Docente da Universidade Estadual Paulista “Júlio de Mesquita Filho”, Campus de Ilha Solteira. [jmlopes@mat.feis.unesp.br](mailto:jmlopes@mat.feis.unesp.br).

“obtenção e interpretação da média aritmética”. Os PCN (BRASIL, 1998, p. 74 e p. 90) estabelecem, para o terceiro ciclo (5ª e 6ª séries), a “compreensão do significado da média aritmética como um indicador da tendência de uma pesquisa” e, para o quarto ciclo (7ª e 8ª séries), a “obtenção das medidas de tendência central de uma pesquisa (média, moda e mediana), compreendendo seus significados para fazer inferências”.

Já, para o Ensino Médio, nos PCN<sub>+</sub> (BRASIL, 2002, p. 127), a unidade temática Estatística aparece no eixo estruturador Análise de Dados e contempla a “descrição de dados; representações gráficas; análise de dados: médias, moda e mediana, variância e desvio padrão”.

Com relação aos conteúdos da Estatística, a Proposta Curricular do Estado de São Paulo: Matemática - Ensino Fundamental - Ciclo II e Ensino Médio (SÃO PAULO [ESTADO], 2008) estabelece, para a 5ª série do Ensino Fundamental: leitura e construção de gráficos e tabelas e média aritmética. E, para a 3ª série do Ensino Médio, o estudo de gráficos estatísticos: cálculo e interpretação de índices estatísticos, medidas de tendência central: média, mediana e moda, medidas de dispersão: desvio médio e desvio padrão e elementos de amostragem.

Em uma análise comparativa sobre as orientações curriculares para o ensino de Estatística em Portugal, nos Estados Unidos e na Inglaterra, Ponte e Fonseca (2001, p. 113) afirmam que, nesses três países, a Estatística constitui-se em uma área relativamente recente dentro do currículo de Matemática. Destacam ainda que o currículo português, até o final do terceiro ciclo do ensino básico (alunos com idade entre 12 e 15 anos), “dá sobretudo atenção às medidas de tendência central, ao passo que os documentos americano e inglês valorizam, também, desde relativamente cedo, as medidas de dispersão”.

Na Espanha, o Decreto Real 1513/2006, de 7 de dezembro, que estabelece os conteúdos mínimos para a Educação Primária, inclui o ensino de Estatística dentro do bloco de conteúdos sobre Tratamento da Informação, azar e probabilidade desde o primeiro ciclo. Esse documento destaca a necessidade de iniciar, o quanto antes, o estudo dos fenômenos estatísticos; e de tornar mais ativa e exploratória sua metodologia de ensino, para influenciar na compreensão das informações presentes nos meios de comunicação e suscitar o interesse dos alunos pelos conhecimentos estatísticos e a valorização destes para a tomada de decisões (HARO; MOLL, 2010).

É comum a necessidade de tomar decisões, diante de questões políticas e sociais, sobre índices, muitas vezes, contraditórios divulgados pela mídia. “Para exercer a cidadania, é necessário saber calcular, medir, raciocinar, argumentar, tratar informações estatisticamente, etc.” (BRASIL, 1997, p. 29).

Como esperar que um egresso do Ensino Médio possa exercer sua plena cidadania, sem o conhecimento mínimo de conceitos elementares da Estatística?

O documento *Orientações Curriculares para o Ensino Médio* (BRASIL, 2006, p. 79) destaca “a necessidade de se intensificar a compreensão sobre as medidas de posição e as medidas de dispersão, abordadas de forma mais intuitiva no ensino fundamental”.

As medidas de posição descrevem a distribuição de frequências sobre o eixo de variação da variável considerada. A média tende a se localizar em um ponto central

do conjunto de dados e, por isso, essa medida é também denominada de *medida de tendência central*.

Geralmente, apenas as medidas de posição não serão suficientes para uma informação completa sobre um conjunto de dados. Faz-se necessário utilizar também alguma medida de dispersão. As medidas de dispersão servem para indicar o quanto os dados estão dispersos em torno da região central. Especificamente, a variância fornece a dispersão dos dados em torno da média; ou seja, quanto menor a variância, mais concentrados em torno da média os dados estarão.

Segundo Batanero (2001), apenas recentemente a Estatística tem se incorporado, de forma generalizada, ao currículo de Matemática dos ensinos primário e secundário e das diferentes especialidades universitárias, na maioria dos países desenvolvidos. A autora afirma ainda que a relação entre o desenvolvimento de um país e o grau em que seu sistema estatístico produz estatísticas completas e confiáveis é clara, porque essa informação é necessária para a tomada de decisões acertadas do tipo econômico, social e político. A educação estatística não é voltada somente aos técnicos que produzem estas estatísticas, mas também aos profissionais e aos cidadãos, que devem interpretá-las e tomar, por sua vez, decisões fundamentadas nessas informações.

Para os PCN<sub>+</sub>, a Estatística e a Probabilidade devem ser vistas

(...) como um conjunto de ideias e procedimentos que permitem aplicar a Matemática em questões do mundo real, [...] devem ser vistas também como formas de a Matemática quantificar e interpretar conjuntos de dados ou informações que não podem ser quantificados direta ou exatamente (BRASIL, 2002, p. 126).

Para o desenvolvimento do pensamento estatístico e do pensamento probabilístico, Lopes (1998) já defendia a utilização de atividades que partissem sempre de uma problematização de situações do cotidiano dos alunos, o que, por meio da estratégia de resolução de problemas, poderá auxiliá-los na realização de seus trabalhos futuros e também contribuir para o desempenho de sua cultura geral.

Neste artigo, apresentamos e discutimos os resultados obtidos por meio do desenvolvimento de um jogo de treinamento no estudo de duas das principais medidas da Estatística Descritiva: a média, que é uma *medida de posição*, e a variância, que é uma *medida de dispersão*. O jogo proposto foi desenvolvido com alunos do 3º ano do Ensino Médio de duas escolas públicas no interior do estado de São Paulo. A Estatística Descritiva, como o próprio nome estabelece, se preocupa em descrever e organizar dados experimentais por representações gráficas, distribuições de frequência ou parâmetros associados a essas distribuições, não utilizando conceitos probabilísticos e não se preocupando em estender as conclusões a outros dados diferentes ou a uma população. A análise e a interpretação dos dados, bem como as inferências sobre uma população por meio de informações baseadas em uma amostra, são características da Inferência Estatística.

## **Sobre o ensino e o conhecimento dos professores em Estatística**

Batanero (2001) afirma que o número de investigações sobre a didática da Estatística é ainda muito escasso, em comparação com os existentes em outros ramos da

Matemática. Por isso, não se conhecem ainda quais são as principais dificuldades dos alunos em muitos conceitos importantes. Seria preciso também experimentar e avaliar métodos de ensino adaptados à natureza específica da Estatística, pois nem sempre se podem transferir, para o ensino-aprendizagem de Estatística, os princípios gerais do ensino de Matemática.

Existem poucos estudos sobre as principais dificuldades dos alunos em relação aos conceitos básicos da Estatística.

O insuficiente desenvolvimento da didática da estatística deve ter, também, reflexos na formação do professor que vai atuar na Educação Estatística. As dificuldades dos alunos podem ter como raiz a própria dificuldade dos professores, que, possivelmente, não tiveram uma formação de qualidade para trabalharem com temas da estatística. (MARQUES; GUIMARÃES; GITIRANA, 2011, p. 727).

Essas mesmas autoras apresentam um estudo que investigou como o conceito de média aritmética era compreendido por alunos e professores dos anos iniciais do Ensino Fundamental. Nesse estudo foi observada uma grande dificuldade na compreensão dos diferentes invariantes (propriedades) e significados do conceito de média aritmética. Os professores obtiveram um desempenho significativamente superior aos dos alunos; entretanto, inferior ao esperado. (MARQUES; GUIMARÃES; GITIRANA, 2011, p. 727).

Dentre os conceitos da Estatística Descritiva, o conceito de média aritmética “salvo melhor juízo” é o mais estudado. Destacamos, além do estudo realizado por Marques, Guimarães e Gitirana (2011), os trabalhos de Batanero (2000), Cazorla (2003), Gobo e Batanero (2004), Haro e Moll (2010), Magina et al. (2008) e Strauss e Bichler (1988).

Ajudar as crianças e os jovens a compreenderem progressivamente as ideias estocásticas fundamentais não é tarefa fácil, posto que é necessário adaptar essas ideias a suas capacidades cognitivas e desenhar situações didáticas que propiciem o aprendizado significativo (BATANERO, 2000).

Caseiro, Ponte e Monteiro (2013, p. 2) explicam que o tópico estatística nem sempre é trabalhado nas salas de aula do ensino básico, “tendendo muitos professores a deixá-lo para o final do ano letivo, para apenas o lecionar caso ainda tenham tempo, o que muitas vezes não acontece”. Uma das razões para os professores não trabalharem os conteúdos básicos da estatística nesse nível de escolaridade pode estar relacionada com a sua formação: alguns estudos mostram fragilidades de professores e de futuros professores no processo de ensino e aprendizagem de conteúdos da Estatística (CASEIRO; PONTE; MONTEIRO, 2013).

Em um estudo de Caseiro (2010) com professoras portuguesas do 1º ciclo, observou-se que elas apresentavam dificuldades em conceitos estatísticos como moda, diagrama de Venn e de Carrol e situações aleatórias. Outros estudos, como os de Batanero, Godino e Roa (2004) e Estrada et al. (2009) também concluíram que os professores apresentam deficiência em conteúdos da Estatística básica.

Segundo Groth (2007, apud CASEIRO; PONTE; MONTEIRO, 2013, p. 2),

(...) de todos os temas matemáticos dos currículos, normalmente o conhecimento dos professores é mais fraco na área de Estatística. No seu entender, em muitos

conceitos, estes exibem algumas das mesmas dificuldades que os estudantes. Desta forma e dado que o conhecimento dos professores é um dos aspectos mais determinantes de um ensino eficaz, é imprescindível que se continue a investigar o conhecimento necessário ao ensino da Estatística.

O trabalho colaborativo é uma possível forma de ajudar os professores na superação de suas deficiências com conceitos da Estatística. “A colaboração é um elemento fundamental da cultura profissional dos professores. Trata-se de estratégia essencial para lidar com problemas de dimensão significativa” (PONTE; SERRAZINA, 2004 apud CASEIRO; PONTE; MONTEIRO, 2013, p. 3).

### **O uso de jogos no ensino da Estatística Descritiva**

A utilização de jogos como proposta de ensino de Matemática teve início com as concepções de teóricos construtivistas, como Piaget e Vigotsky. “A partir desta convicção teórica, o jogo é tomado como instrumento pedagógico e vemos uma introdução gradual e crescente dos jogos no ensino de Matemática” (MUNIZ, 2010, p. 13).

Para a aprendizagem de conceitos de Ciências e Matemática, é importante a adoção de métodos de aprendizado ativo e interativo.

Os alunos alcançam o aprendizado em um processo complexo, de elaboração pessoal, para o qual o professor e a escola contribuem permitindo ao aluno se comunicar, situar-se em seu grupo, debater sua compreensão, aprender a respeitar e a fazer-se respeitar [...]; criando situações em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar; valorizando as *atividades coletivas* que propiciem a discussão e a elaboração conjunta de ideias e de práticas; desenvolvendo *atividades lúdicas*, nas quais o aluno deve se sentir desafiado pelo jogo do conhecimento e não somente pelos outros participantes. (BRASIL, 2000, p. 52, grifos nossos).

Muitos jogos têm sido desenvolvidos para serem utilizados no ensino de Matemática. O número de jogos para trabalhar com conceitos matemáticos da Educação Infantil e Fundamental é consideravelmente maior do que aqueles desenvolvidos para o Ensino Médio. Porém, jogos desenvolvidos especificamente para o trabalho com conceitos da Estatística Descritiva são pouco disponíveis na literatura especializada, especialmente em língua portuguesa.

Entre os poucos jogos disponíveis, o “Statistics Equations”, desenvolvido por Dukes (1987), pode ser utilizado para o ensino introdutório de conceitos de Estatística, em particular das medidas de tendência central: média aritmética, mediana, moda, média geométrica e média harmônica. Neste jogo, o lado esquerdo da equação é uma Estatística e o lado direito da equação contém a solução, que é feita por meio de símbolos e números que constituem uma fórmula para a Estatística.

Leech (2008) apresenta o “Statistics Poker”, que pode ser utilizado como reforço no estudo de conceitos básicos de Estatística. Esse jogo pode ser disputado por 4 ou 5 jogadores e utiliza um baralho com 52 cartas, um (ou dois) dado(s) e 10 fichas com alguns conceitos básicos das medidas de posição, como, por exemplo: média mais alta, média mais baixa, mediana mais alta, moda mais baixa e outras. Em cada rodada, o dado é rolado, e a face de cima define o número de cartas de cada jogador. Cada carta

do baralho tem seu valor especificado, e o jogador que distribuiu as cartas vira uma delas, para escolher o conceito que será utilizado naquela rodada. Todos calculam a medida (ou as medidas) de posição, e vence aquele que conseguir a melhor jogada.

O Caderno do Professor – Matemática, elaborado pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo (SÃO PAULO [ESTADO], 2009), traz uma espécie de jogo pedagógico, denominado *Jogo do Desvio Médio*. Nessa atividade, os alunos são desafiados a descobrir, apenas por amostragem, a quantidade de peças de cada uma das cinco cores, no total de 200 peças contidas em um saquinho. O objetivo principal é fazer com que os alunos possam avaliar a baixa significância da média aritmética como única medida de análise; ou seja, perceber, como já foi dito, que, geralmente, uma única medida de posição não será suficiente para descrever de maneira satisfatória um conjunto de dados, sendo necessária também a utilização de alguma medida de dispersão.

Em Lopes, Corral e Resende (2012), é apresentado um jogo de treinamento para o trabalho com as medidas de posição: média, mediana e moda, com a utilização de cartas de um baralho comum. As pontuações são obtidas em função dos maiores valores de uma das medidas de posição – a média, a mediana e a moda. Em cada rodada, um dos jogadores escolhe qual delas será utilizada. Assim, o jogo trabalha, ao mesmo tempo, com as três medidas.

Embora não declarado como jogo pela autora, Kraus (2010) apresenta uma interessante atividade para sala de aula, que pode ajudar os alunos no entendimento e na avaliação dessas medidas de tendência central, usando uma história fictícia de monstros. A atividade deve ser apresentada depois que os alunos tiverem estudado esses conceitos. O objetivo principal não é saber calcular, mas, sim, saber avaliar essas medidas.

De forma breve, a atividade pode ser descrita da seguinte forma: o estudante está preso no covil estatístico do mal. Todas as saídas do calabouço estão cheias de monstros cruéis. Existem três saídas (portas), cada uma delas marcada com uma medida de tendência central que descreve o tamanho dos monstros que estão entre a porta e a liberdade. A primeira porta indica moda igual a 25 polegadas, a segunda indica mediana igual a 40 polegadas e a terceira indica média igual a 48 polegadas. Os alunos são convidados a estudar as portas e escolher o caminho mais seguro para a liberdade. Assim que os alunos fazem suas escolhas por escrito, as portas são abertas para mostrar os monstros que esperam os intrépidos estudantes de Estatística.

Atrás das duas primeiras portas existe um monstro gigantesco. Assim, caso o estudante escolha uma delas, será certamente comido pelo monstro. Por causa da distribuição enviesada, tanto a moda como a mediana não serão capazes de detectar a presença desse terrível monstro. A porta 3 é a melhor escolha: existem monstros, mas nenhum com tamanho suficiente para comer o estudante. Depois da atividade, os alunos podem entender que a média é uma medida que limita a presença de monstros enormes. A autora afirma que, em uma classe típica e de sua experiência, poucos alunos escolhem a porta 3.

Existem vários tipos e várias classificações de jogos. Para Borin (2004), os *Jogos de Treinamento* são idealizados para auxiliar a memorização ou a fixação de conceitos, fórmulas ou técnicas relacionadas a algum tópico do conteúdo. E, geralmente, são

utilizados quando alguns alunos necessitam de reforço em algum tópico. Assim, seguindo a concepção dessa autora, o jogo que aqui será apresentado caracteriza-se como um Jogo de Treinamento. Ou seja, ele deve ser utilizado pelo professor após já ter apresentado formalmente os conceitos de média e variância.

Ainda segundo essa mesma autora, como os Jogos de Treinamento se caracterizam pela repetição, o professor, ao utilizá-los, deve ter claros os objetivos que quer alcançar, para evitar a mera memorização e para não correr “o risco de transformá-los em apenas um instrumento de valorização do pensamento mecânico e algorítmico” (BORIN, 2004, p. 15).

Os PCN asseguram que a participação em jogos de grupo representa uma conquista cognitiva, emocional, moral e social para os alunos e um estímulo para o desenvolvimento do seu raciocínio lógico. Afirmam também que

(...) um aspecto relevante nos jogos é o desafio genuíno que eles provocam no aluno, que gera interesse e prazer. Por isso, é importante que os jogos façam parte da cultura escolar, cabendo ao professor analisar e avaliar a potencialidade educativa dos diferentes jogos e o aspecto curricular que se deseja desenvolver (BRASIL, 1997, p. 49).

O jogo proposto no presente trabalho é original e será denominado MEDVAR. Ele utiliza, simultaneamente, duas medidas da Estatística Descritiva - a média e a variância – e foi apresentado pela primeira vez, com suas regras, em Lopes (2012). Em cada jogada, o jogador deve estabelecer uma estratégia que combina essas duas medidas. E o objetivo, em cada rodada, é obter a maior média e a menor variância ao mesmo tempo. Por envolver simultaneamente a utilização de duas medidas da Estatística Descritiva, consideramos que esse jogo seja mais adequado para alunos do Ensino Médio.

No ensino básico, as aulas de Estatística Descritiva geralmente se resumem ao cálculo das medidas de posição e dispersão para variáveis discretas e/ou contínuas. Os alunos devem realizar contas e mais contas para obter um número, e pouco se trabalha com as interpretações dos resultados e com a comparação entre essas medidas. Como alternativa, poderiam ser exploradas questões do tipo: Neste caso é mais interessante usar a média ou a mediana? Qual a relação entre a média, a mediana e a moda? Por que os governos preferem usar a média para divulgar suas ações? O que significa a renda *per capita* de um país? Não seria mais adequado discutir a distribuição de renda dos cidadãos? Na visão do empregador, qual é a melhor medida de posição para indicar os salários de sua empresa? Na visão dos empregados, qual seria a melhor medida de posição para indicar os salários de uma empresa? Quando a variável é salário, o que representam as medidas de dispersão?

Mesmo com a permissão do uso de calculadoras, as aulas que trabalham com conceitos da Estatística Descritiva não agradam a maioria dos alunos. Hoje, com o advento e a maior facilidade do uso dos computadores, a nosso ver, seria mais interessante calcular essas medidas no computador e se preocupar mais com a discussão dos resultados obtidos.

A proposta didático-pedagógica aqui apresentada, por utilizar um jogo, pode tornar as aulas mais atraentes e motivadoras para os alunos. Todos eles gostam de

jogar, e ninguém gosta de perder. Assim, para ganhar, é necessário compreender bem os conceitos de média e variância e também a melhor estratégia do jogo. Durante as rodadas de cada partida, os jogadores deverão calcular essas duas medidas. Com o passar do tempo e com um maior traquejo, os alunos serão capazes de calcular mentalmente os valores aproximados para a média e para a variância e definir rapidamente qual a sua melhor jogada.

## **O jogo MEDVAR**

Este jogo pode ser disputado por dois ou mais jogadores. Serão realizadas cinco rodadas. Cada uma se completa quando todos os jogadores tiverem realizado suas jogadas. Para a realização do jogo MEDVAR, utilizamos:

### *1 - Material*

Cinco dados honestos, com faces de 1 a 6, um copo de plástico e uma folha de papel para anotar as pontuações de cada rodada.

### *2 - Regras*

2.1. Cada jogador poderá efetuar até três lançamentos em cada rodada. O primeiro lançamento é sempre realizado com os cinco dados. Posteriormente, o jogador decide se aproveitará ou não seus outros dois lançamentos. Para o segundo lançamento, o jogador pode reservar alguns dados e lançar apenas os outros. De forma análoga, faz o terceiro lançamento. Vale a face de cima dos dados.

2.2. Após a finalização da sua jogada, o jogador anota em uma folha de papel os valores das faces obtidas nos cinco dados e os valores que obteve para a média e para a variância.

2.3. Ao final de cada rodada, o jogador que obteve a maior média marca dois pontos, o que obteve a segunda maior média marca 1 ponto, o que obteve a menor variância, 3 pontos, o que obteve a segunda menor variância marca 2 pontos e o que obteve a terceira menor variância, 1 ponto. Quando ocorrer empate, cada jogador recebe a pontuação correspondente. Caso o jogador tenha calculado de maneira errada uma das medidas, não marcará pontos naquela rodada.

2.4. Após a realização das cinco rodadas, cada jogador soma seus pontos e vence aquele que obteve a maior pontuação.

## **Comentários sobre o jogo MEDVAR**

Os dados reservados, tanto no primeiro como no segundo lançamento, não podem ser modificados; ou seja, dado reservado não pode ser utilizado nos lançamentos subsequentes.

A ordem em que cada jogador realiza seus lançamentos pode ser estabelecida em sorteio ou de comum acordo entre os jogadores. Consideramos que mais de quatro jogadores pode tornar o jogo cansativo e desmotivar os participantes.

Como o jogo utiliza dados, o fator sorte não pode ser totalmente desprezado. Entretanto, trata-se também de um jogo de estratégia. Em cada jogada, o jogador

deve procurar obter a maior média, mas também obter a menor variância; isto é, o jogo auxilia na compreensão da variabilidade dos elementos de uma amostra, conceito esse fundamental no estudo da Estatística. O jogador deve estabelecer uma estratégia que combine esses dois objetivos: maior média e menor variância.

Quando nos referimos à média, estamos considerando aqui a média aritmética, que é definida por:

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

e a variância, definida por:

$$\sigma^2 = \frac{(x_1 - \bar{x})^2 + (x_2 - \bar{x})^2 + \dots + (x_n - \bar{x})^2}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{x})^2.$$

Sendo  $x_1, x_2, \dots, x_n$  os  $n$  valores da amostra (e/ou população) considerada. Em Inferência Estatística, quando se trabalha com a variância amostral, por questões teóricas, utilizamos o denominador  $n-1$  no lugar de  $n$ . No caso aqui considerado, podemos supor, sem perda de generalidade, que os cinco valores das faces dos dados formam uma população.

Uma simulação de jogada pode ser como segue: o jogador obtém, no primeiro lançamento, as faces: 3, 3, 3, 4 e 5. Reserva o dado com a face 5, lança novamente os outros quatro dados e obtém as faces 1, 3, 4 e 6. Reserva o dado com a face 6 e lança novamente os outros três dados, obtendo as faces: 1, 1 e 5. Assim, o jogador obtém, nessa rodada, as faces: 1, 1, 5, 5 e 6, média igual a 3,6 e variância igual a 4,64. Caso o jogador tivesse ficado apenas com o seu primeiro lançamento, ou seja, se não tivesse utilizado os outros dois lançamentos, teria obtido a média igual a 3,6 e variância igual a 0,64. Portanto, neste caso, teria obtido a mesma média, mas uma variância aproximadamente sete vezes menor e, assim, uma jogada muito melhor para o jogo MEDVAR.

Depois de algumas partidas do jogo MEDVAR e da resolução de alguns problemas envolvendo situações de jogo, os alunos devem ser capazes de perceber que nem sempre será conveniente buscar apenas obter os maiores valores possíveis para as faces dos dados. Deve-se procurar estabelecer um equilíbrio entre a maior média e a menor variância. É conveniente que os alunos anotem suas jogadas, pois isso irá auxiliá-los na resolução dos problemas e também no entendimento do conceito de variabilidade.

## Metodologia

Foi desenvolvido um trabalho colaborativo com duas professoras efetivas da rede estadual de ensino, com mais de 20 anos de experiência na profissão, e 84 alunos do terceiro ano do Ensino Médio. A proposta de ensino foi aplicada, no mês de novembro de 2012, por essas duas professoras, em duas escolas estaduais de uma pequena cidade do noroeste paulista. A Professora A aplicou o jogo em duas salas da escola 1 e a Professora B, em duas salas da escola 2.

A concepção de trabalho colaborativo que utilizamos aqui é aquela apresentada em Fiorentini (2004, p. 50).

Na colaboração, todos trabalham conjuntamente (co-laboram) e se apoiam mutuamente, visando atingir objetivos comuns negociados pelo coletivo do grupo. Na colaboração, as relações, portanto, tendem a ser não-hierárquicas, havendo liderança compartilhada e co-responsabilidade pela condução das ações.

Para o estudo aqui apresentado, utilizamos uma metodologia qualitativa e interpretativa. Os dados foram coletados por meio do registro no diário de bordo do pesquisador, durante os encontros do grupo de trabalho colaborativo; de uma entrevista semiestruturada e audiogravada – realizada em dezembro de 2012 – com as duas professoras; e também de relatos escritos, e produzidos pelos alunos. A partir desses dois últimos recursos, procuramos elementos que indicassem:

1. o interesse dos alunos pelo jogo;
2. a facilidade e a dificuldade dos alunos com o jogo;
3. o aspecto lúdico como fator importante nas aulas de matemática;
4. as contribuições do jogo para a aprendizagem de conceitos estatísticos.

Durante o jogo, os alunos anotaram os resultados em uma tabela, previamente elaborada, e também relataram por escrito suas considerações sobre a atividade desenvolvida.

### **Aplicação da proposta didático-pedagógica em sala de aula**

O relato de experiência aqui apresentado faz parte de um projeto de pesquisa em desenvolvimento, iniciado no segundo semestre de 2011. A partir dessa data, realizamos alguns encontros com as professoras que utilizariam nossa proposta de ensino. Os encontros – realizados às quartas-feiras, com duração de aproximadamente duas horas, dentro da Hora de Trabalho Pedagógico Coletivo – HTPC - desses professores, na sua cidade de origem – tiveram por objetivo ampliar os conhecimentos básicos da Estatística Descritiva, mais especificamente das medidas de posição e de dispersão; e também discutir e preparar o material que seria utilizado em sala de aula. Discutimos o jogo, suas regras e os problemas que havíamos formulado. As professoras tiveram liberdade para apresentar sugestões de mudanças no material, pois tudo era discutido pelo grupo.

Vários professores que ministram aulas de matemática na escola onde desenvolvemos nosso projeto participaram de nossos encontros de trabalho. Agora, apenas duas professoras utilizaram nossa proposta em sala de aula, por serem as únicas que estavam ministrando aulas para o terceiro ano do Ensino Médio, naquele momento.

As professoras A e B aplicaram nossa proposta didático-pedagógica na seguinte ordem cronológica: inicialmente, trabalharam os conceitos da Estatística Descritiva da forma tradicional, utilizando os chamados “caderninhos” disponibilizados pela Secretaria de Educação do Estado de São Paulo.

Posteriormente, apresentaram e realizaram cinco rodadas do jogo MEDVAR. Uma das professoras, depois de trabalhar com o jogo, utilizou, como forma de revisar os

conteúdos trabalhados, os 12 problemas do Anexo 1. A outra professora justificou a não utilização dos problemas por falta de tempo. O tópico “Estatística Descritiva” é o último do ano e, geralmente, é apresentado apenas parcialmente, ou nem mesmo é considerado.

Especificamente para o trabalho com o jogo, em que foi permitido o uso de calculadoras, cada professora utilizou duas aulas de 50 minutos cada uma e dividiu a turma em grupos de quatro alunos. Eventualmente, algum grupo teve três ou cinco alunos. Ambas utilizaram o jogo como forma de retomar os conceitos e também de avaliar o aprendizado. Como os alunos anotaram os resultados de suas jogadas e existia a necessidade do cálculo da média e da variância para a determinação dos pontos de cada jogador, as professoras aproveitaram essas anotações para verificar se os cálculos da média e da variância estavam corretos. Isso foi considerado como nota avaliativa. A Figura 1 mostra um recorte de uma tabela utilizada por um dos grupos de alunos da Professora B.

Tabela de pontuação para o Jogo MEDVAR

	Jogador 1	P	Jogador 2	P	Jogador 3	P
1ª rodada	(6, 5, 5, 5, 4) Med = 5 ✓ Var = 0,4 ✓	3	(6, 6, 5, 3, 3) Med = 4,6 ✓ Var = 2,4 ✗	1	(5, 5, 4, 4, 2) Med = 4 ✓ Var = 3,2 ✓	0
2ª rodada	(6, 6, 5, 5, 2) Med = 4,8 ✓ Var = 2,16 ✓	0	(6, 6, 6, 5, 5) Med = 5,6 ✓ Var = 0,24 ✓	2	(4, 4, 4, 2, 1) Med = 3 ✓ Var = 5,6 ✓	0
3ª rodada	(6, 6, 5, 5, 3) Med = 5 ✓ Var = 1,2 ✓	2	(6, 6, 5, 4, 4) Med = 5 ✓ Var = 0,8 ✓	2	(5, 5, 4, 4, 2) Med = 4,2 ✓ Var = 3,76 ✓	0
4ª rodada	(6, 6, 5, 4, 1) Med = 4,4 ✓ Var = 3,4 ✓	0	(5, 4, 3, 3, 1) Med = 3,2 ✓ Var = 1,76 ✓	0	(6, 6, 5, 5, 5) Med = 5,4 ✓ Var = 0,24 ✓	3
5ª rodada	(6, 6, 5, 5, 3) Med = 5 ✓ Var = 1,2 ✓	2	(5, 5, 5, 5, 4) Med = 4,8 ✓ Var = 0,2 ✗	3	(6, 6, 6, 2, 2) Med = 4,4 ✓ Var = 3,84 ✓	0
TOTAL		13		16		10

**Legenda:**

Med = valor da média;

Var = valor da variância;

P = valor da pontuação daquela rodada

**Figura 1** - Tabela para marcação de pontos do jogo MEDVAR Fonte: (Professora B)

Em nossa experiência, notamos que os alunos gostam, quando são solicitados a jogar, mas são mais resistentes, quando solicitados a resolver problemas. Temos recomendado aos professores que motivem seus alunos, dando conhecimento a eles de que, resolvendo os problemas, eles se tornarão melhores jogadores. Quando da resolução dos problemas, é conveniente o trabalho em grupo. Consideramos que o ideal são grupos formados por três ou quatro alunos.

## Relato dos alunos e das duas professoras

Apresentamos, na sequência, alguns recortes dos relatos escritos pelos alunos e também das considerações oferecidas pelas duas professoras.

Nos relatos escritos, observamos frases indicando o interesse pelo jogo: “o jogo é interessante”, “gostei muito”, “forma diferente de aprendizagem”, “mais interesse de participar da aula”, “uma matéria que seria cansativa se torna interessante” e “foi a única matéria que eu gostei e aprendi”. O interesse pela atividade com o jogo está de acordo com o estabelecido em Borin (2004, p. 1), “resolvemos trabalhar apenas com jogos, pois eram as atividades que mais os envolviam e motivavam”.

Sobre o entendimento do jogo e de suas regras, destacamos os relatos de três alunos: “muito fácil de entender e fácil de jogar”, “regras fáceis” e “regras claras”.

Sobre as dificuldades do jogo, destacamos a seguir dois relatos de alunos da professora A: “no começo do jogo tudo foi meio complicado, mas depois fui conhecendo melhor e tudo se tornou mais fácil, adorei jogar” e “eu aprendi o jogo, mas achei um pouco complicado, errei muitas vezes, mas consegui jogar e concluir o jogo”.

Pode-se inferir que os alunos gostaram do aspecto lúdico da atividade. Destacamos os seguintes relatos: “me diverti”, “fácil e divertido”; “sai da rotina”, “estamos nos divertindo e ao mesmo tempo aprendendo”, “o jogo é legal” e “achei ele (o jogo) muito criativo, dá para você aprender brincando, uma boa maneira de aprender a matéria”.

Sendo um jogo de treinamento e já que os alunos tiveram que calcular várias vezes a média e a variância, como esperado, as maiores reclamações e o maior número de erros ocorreram quando do cálculo da variância. Estes dois relatos indicam as dificuldades no cálculo da variância: “eu achei o jogo divertido, mas é difícil calcular as variâncias” e “gostei muito, mas é difícil fazer a variância”.

Entretanto, três alunos destacaram que o uso do jogo contribuiu para uma melhoria no entendimento dos cálculos matemáticos para a determinação da média e da variância: “estimula e aprimora meus cálculos”, “agora ficou fácil calcular a média e a variância” e “as contas repetitivas das rodadas nos levam a guardar as fórmulas na mente, ajuda na memorização”.

Os alunos destacaram também que o uso do jogo colaborou com o fortalecimento desses dois conceitos da Estatística Descritiva. Alguns relatos foram: “serviu para fortalecer os conhecimentos de média e variância”, “o jogo me ajudou a atender a matéria”, “através dele (do jogo) é possível assimilar os conteúdos de estatística” e “este jogo foi bom para a fixação da média e da variância”.

Sendo o jogo MEDVAR um jogo de treinamento, os relatos anteriores confirmam o estabelecido em Borin (2004, p. 15): “os jogos de treinamento são idealizados para auxiliar a memorização ou fixação de conceitos, fórmulas e técnicas ligadas a alguns tópicos do conteúdo. Eles são utilizados [...] como substitutos das enfadonhas listas de exercícios”.

Para um bom desempenho no jogo, é necessário adotar uma estratégia conveniente, e isso pode auxiliar no desenvolvimento do raciocínio dos alunos. Alguns deles observaram esse fato: “ajuda a raciocinar”, “estimula o raciocínio”, “te faz raciocinar” e “estimula o desenvolvimento do raciocínio lógico dos alunos de forma divertida e

menos monótona”. O desenvolvimento do raciocínio, como observado pelos alunos, está de acordo com o que aponta Borin (2004, p. 8),

(...) a atividade de jogar, se bem orientada, tem papel importante no desenvolvimento de habilidades de raciocínio como organização, atenção e concentração, tão necessárias para o aprendizado, em especial da Matemática, [...]. Também no jogo, identificamos o desenvolvimento da linguagem, criatividade e raciocínio dedutivo, exigidos na escolha de uma jogada e na argumentação necessária durante a troca de informações (BORIN, 2004, p. 8).

Macedo, Petty e Passos (2000, p. 20) também acreditam que o uso do jogo contribua para o desenvolvimento de habilidades mentais, pois “ao jogar, o aluno é levado a exercitar suas habilidades mentais e a buscar melhores resultados para vencer”.

Um dos grupos da professora B relatou: “concluímos que quanto maiores e mais próximos os números, maior era a chance de ganhar”. Assim, esse grupo percebeu que, além da maior média, deveriam obter a menor variância. Esses alunos compreenderam o conceito de variância, ou ainda, o conceito de variabilidade dos dados em uma amostra, conceito este fundamental no estudo da Estatística. Ter chegado a esse bom resultado certamente motivou os alunos e despertou neles o interesse pela matemática.

Os depoimentos das duas professoras confirmam esse resultado: “*gostaram do jogo*”, “*acharam as regras fáceis de entender*”, alguns “*alunos que não participavam muito da aula, eles participaram, eles gostaram, até teve um que colocou no depoimento que foi a única matéria do ano que ele gostou, que ele aprendeu e gostou, [...] envolveu todos*”, “*eu acho que foi a matéria que eles tiveram maior interesse*” e “*tudo que é diferente do tradicional eles gostam, [...] eu percebi que eles gostaram mesmo da atividade*”.

Quando utilizam o jogo MEDVAR, os alunos estão trabalhando com conceitos matemáticos. Assim, as respostas das professoras estão em concordância com o estabelecido em Macedo, Petty e Passos (2000, p. 14) quando afirmam que “a ação de jogar exige, por exemplo, realizar interpretações, classificar e operar informações, aspectos que têm uma relação direta com as demandas relativas às situações escolares”. No caso específico do trabalho com Estatística, essas habilidades desenvolvidas pelo jogo são de grande valia na superação das dificuldades que eventualmente possam surgir.

Dentre as dificuldades encontradas pelos alunos, ao trabalhar com conceitos de Estatística Descritiva, as professoras mencionaram o cálculo da variância. Elas concordam que o uso do jogo, pela necessidade de calcular várias vezes a variância, colaborou para diminuir essa dificuldade. Ele também contribuiu para a interpretação e o entendimento do significado do conceito de variância e da variabilidade dos dados de uma amostra.

*Quando a gente trabalha só o conteúdo, só o exercício em si, eles têm um pouco de dificuldade, mas quando eles começaram a jogar, aí logo nas primeiras rodadas eles já foram percebendo os resultados que eles precisavam buscar, [...] eles procuravam números próximos, ou quando saía, eles já comemoravam, que teriam um*

*resultado bom, [...] é uma coisa muito mais fácil deles perceberem no jogo do que deles perceberem só fazendo exercícios (Professora A).*

*Na hora de jogar os dados que você tem aquelas oportunidades de trocar, de jogar de novo, eu acho que no início eles não perceberam que era importante, mas depois, na hora de calcular, eles perceberam, aí eles já começavam a repetir as jogadas. Assim, não faziam de qualquer jeito, [...] ficou interessante para eles, estar assim, prestando atenção neste detalhe para poder ganhar (Professora B).*

As professoras afirmaram que os alunos se sentem mais motivados para o trabalho com jogos. A Professora A relatou: *“é bem interessante, [...] eles ficam esperando, não vai ter joguinho?”*. A Professora B mencionou: *“eu acho que fechou, assim, porque só com o livro, eles não perceberam [...] quando foi trabalhar o jogo eles ficaram espertinhos”*.

Com relação à ampliação do conhecimento estatístico e ao conhecimento didático da Estatística adquiridos, as duas professoras concordam que tiveram ganhos significativos. A Professora A mencionou que, durante a atividade, os alunos perguntavam e questionavam. Isso corrobora o que afirmam os PCN (BRASIL, 2000 p. 52): devemos criar situações *“em que o aluno é instigado ou desafiado a participar e questionar”*.

*É um momento que eles sossegaram, eles perguntavam, e questionavam, até aqueles que não se interessavam queriam saber, queriam ver se estava certo, eles queriam entender, [...] então é um momento que envolve todo mundo e lógico que isso é bom para a gente, [...] estar conseguindo envolver, estar fazendo com que conheçam e dominem aquele conteúdo que estão estudando (Professora A).*  
*Melhorou, porque parece que fixa melhor, eu achei que valeu a pena, sim, o jogo é o diferente, sai daquela mesmice de todo dia. Explica a matéria resolve exercício, explica a matéria resolve exercício, mesmo que eles formem grupo, [...] eles ainda acham que é tudo igual. Agora quando você fala: “oh!, eu tenho um jogo é assim, é assado”, [...] para mim também eu achei bacana, para minha prática docente, [...] não sabia que ia ter tanto efeito. Eu achei muito bom (Professora B).*

Para a Professora B, o uso da atividade com o jogo contribuiu para a melhora nas notas dos alunos, tanto na avaliação final que aplicou como nas provas do ENEM e do SARESP. Geralmente, os conteúdos de Estatística Descritiva não são estudados. Como já apontamos aqui, trata-se do último conteúdo previsto para o ano, *“e geralmente a gente não consegue chegar, com esta atividade, deu uma fechada, pelo menos nos conhecimentos básicos, teve várias questões de Estatística tanto no ENEM quanto no SARESP”*.

Destacamos ainda a fala de uma das professoras sobre um de seus alunos.

*Esse menino especial chama-se João (nome fictício), ele trabalha com a mãe dele numa loja, uma loja conceituada aqui da cidade, e durante o ano, assim, você não consegue despertar o interesse do menino. Quando eu entrei nesta matéria, houve uma transformação, ele que tem essa fala para mim: “Professora, [...] que matéria mais gostosa!”. Eu falei para ele: “Olha, João, vai fazer então administração para continuar os negócios de sua mãe”. Você via a facilidade dele, o raciocínio*

*dele, ele fazia conta de cabeça, eu achava que ele nem [...] entendia direito, no meu conceito, eu achava que ele não aprendia direito. Ele me surpreendeu [...] de uma tal maneira, o interesse dele, [...] foi muito bacana [...] . Uma pessoa que geralmente não fazia nada, copiava a resposta da lousa ela se interessando, ela somando, falando, “Oh! dá tanto, oh!, então dá tanto” (Professora B).*

A partir de nossa experiência com o uso de jogos em sala de aula, das respostas apresentadas pelas professoras e dos relatos escritos pelos alunos, acreditamos, como Macedo, Petty e Passos (2000, p. 14), que

(...) a discussão desencadeada a partir de uma situação de jogo, mediada por um profissional, vai além da experiência e possibilita a transposição das aquisições para outros contextos. Isto significa considerar que as atitudes adquiridas no contexto de jogo tendem a tornar-se propriedade do aluno, podendo ser generalizadas para outros âmbitos, em especial, para situações de sala de aula.

### **Considerações finais**

Nos dias atuais, as propostas curriculares de Matemática, em todo o mundo, dedicam atenção especial ao estudo de conhecimentos básicos da Estatística e da Probabilidade, enfatizando que o estudo desses temas é imprescindível para que as pessoas “possam analisar índices de custo de vida, realizar sondagens, escolher amostras e *tomar decisões* em várias situações do cotidiano” (LOPES, 2008, p. 59, grifo nosso).

Durante o jogo aqui apresentado, o aluno é levado a tomar decisões, mudar ou manter seus dados. Apenas procurar obter a maior média nem sempre será a melhor jogada. O jogo privilegia a homogeneidade dos valores dos dados; ou seja, quanto menos dispersos em torno da média, melhor será a pontuação do jogador.

Assim, com a utilização do jogo MEDVAR e dos problemas aqui apresentados, ou de outros que o professor considere adequados formular, acreditamos contribuir para o desenvolvimento do raciocínio lógico e dedutivo dos alunos e também para o trabalho dos professores do Ensino Médio que pretendam ensinar esses conteúdos. Este tipo de sequência didática geralmente não é contemplado nos livros didáticos.

Pelos relatos das professoras e também dos alunos, são notórios o interesse e o entusiasmo dos alunos pela participação no tipo de proposta didático-pedagógica aqui apresentada. Poucos são os alunos que não gostam de trabalhar com jogos na sala de aula. Assim, acreditamos que esse tipo de ação contribui com a formação do cidadão, pois,

(...) quando a escola promove uma condição de aprendizado em que há entusiasmo nos fazeres, paixão nos desafios, cooperação entre os partícipes, ética nos procedimentos, está construindo a cidadania em sua prática, dando as condições para a formação dos valores humanos fundamentais, que são centrais entre os objetivos da educação (BRASIL, 2000, p. 55).

## Referências

- BATANERO, C. Significado y comprensión de las medidas de posición central. **Revista de Didáctica de las Matemáticas**, n. 25, p. 41-58, 2000. Disponível em: <<http://www.ugr.es/~batanero/publicaciones%20index.htm>>. Acesso em: 17 jan. 2013.
- BATANERO, C. **Didáctica de la estadística**. Granada: Universidad de Granada, 2001. 210p.
- BATANERO, C.; GODINO, J. D.; ROA, R. Training teachers to teach probability. **Journal of Statistics Education**, v. 12, n.1, 2004.
- BORIN, J. **Jogos e resolução de problemas**: uma estratégia para as aulas de matemática. São Paulo: IME-USP, 2004. 100p.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Ensino de primeira à quarta série. Brasília: MEC/SEF, 1997. 142p.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Secretaria de Educação Fundamental. Ensino de quinta a oitava séries. Brasília: MEC/SEF, 1998. 148p.
- BRASIL. **Parâmetros curriculares nacionais**: ensino médio. Secretaria de Educação Média e Tecnológica, Parte III. Brasília: MEC, 2000. 58p.
- BRASIL. Ministério da Educação e do Desporto. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. **PCN+**: Ensino Médio. Brasília: MEC, 2002. 144p.
- BRASIL. **Orientações curriculares para o ensino médio**. Secretaria de Educação Básica, v. 2. Brasília: MEC, 2006. 135p.
- CASEIRO, A. **Conhecimento dos professores de 1º ciclo sobre educação estatística**. 2010. Dissertação (Mestrado) – Escola Superior de Educação de Lisboa, Lisboa, 2010.
- CASEIRO, A.; PONTE, J. P.; MONTEIRO, C. O que aprendem os professores uns com os outros? O trabalho colaborativo como forma de promover o desenvolvimento do conhecimento estatístico para o ensino. In: JORNADAS VIRTUALES EM DIDÁCTICA DE LA ESTADÍSTICA, PROBABILIDAD Y COMBINATORIA, 1., 2013, Granada, Espanha. **Anais ...** Granada, 2013.
- CAZORLA, I. M. Média aritmética: um conceito prosaico e complexo. In: SEMINÁRIO DE ESTATÍSTICA APLICADA, 9., 2003, Rio de Janeiro. **Anais ...** Rio de Janeiro: IASI, 2003. p. 01-15.
- DUKES, R. L. Teaching statistics with nonsimulation games. **JSTOR: teaching sociology**, v. 15, n. 2, p. 184-190, 1987. Disponível em: <<http://www.jstor.org/discover/10.2307/1318034?uid=3737664&uid=2129&uid=2&uid=70&uid=4&sid=21100980006163>>. Acesso em: 23 ago. 2012.
- ESTRADA, A. et al. As atitudes em relação à estatística em professores: um estudo comparativo de países. In: ENCONTRO DE INVESTIGAÇÃO EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA: NÚMEROS E ESTATÍSTICA: REFLECTINDO NO PRESENTE, PERSPECTIVANDO O FUTURO, 19., 2009, Vila Real. **Anais ...**, Vila Real, Portugal, 2009.
- FIORENTINI, D. Pesquisar práticas colaborativas ou pesquisar colaborativamente? In: BORBA, M. C.; ARAUJO, J. L. (Orgs.). **Pesquisa qualitativa em educação matemática**. Belo Horizonte: Autêntica, 2004.
- GOBO, B.; BATANERO, C. Significados de la media em los libros de texto de secundaria. **Enseñanza de las ciencias**, Barcelona, v. 22, n. 1, p. 5-18, 2004.

HARO, J. J. O.; MOLL, V. F. Significados personales de los futuros profesores de educación primaria sobre la media aritmética. **Educación Matemática**, v. 23, n. 2, p. 91-109, 2010.

KRAUS, S. Monstrous methods for teaching central tendency concepts. **Teaching Statistics**, v. 32, n. 1, p. 21-23, 2010.

LEECH, L. N. Statistics poker: reinforcing basic statistical concepts. **Teaching Statistics**, v. 30, n. 1, 2008. Disponível em: <<http://onlinelibrary.wiley.com/doi/10.1111/j.1467-9639.2007.00309.x/pdf>>. Acesso em: 05 jan. 2013.

LOPES, C. A. E. **A probabilidade e a estatística no ensino fundamental**: uma análise curricular. 1998. Dissertação (Mestrado em Educação) – Faculdade de Educação, Universidade Estadual de Campinas, Campinas, 1998.

LOPES, C. A. E. O ensino da estatística e da probabilidade na educação básica e a formação dos professores. **Caderno Cedes**, Campinas, v. 28, n. 74, p. 57-73, jan./abr. 2008.

LOPES, J. M. Uma proposta para o estudo dos conceitos de média e variância. In: ENCONTRO ANUAL DE PROFESSORES DE MATEMÁTICA - ProfMat2012, Coimbra. **Anais...** Coimbra: APM, 2012.

LOPES, J. M.; CORRAL, R. S.; RESENDE, J. S. O estudo da média, da mediana e da moda através de um jogo e da resolução de problemas. **Revista Eletrônica de Educação**. São Carlos, SP: UFSCar, v. 6, p. 250-270, nov. 2012. Disponível em: <<http://www.reveduc.ufscar.br>>. Acesso em: 05 jan. 2013.

MACEDO, L.; PETTY, A. L. S.; PASSOS, N. C. **Aprender com jogos e situações-problema**. Porto Alegre: ARTMED, 2000. 116p.

MAGINA, S. et al. Concepções e concepções alternativas de média: um estudo comparativo entre professores e alunos. In: INTERNATIONAL CONGRESS ON MATHEMATICAL EDUCATION, 11., 2008, Monterrey, México. **Proceeding ...** Monterrey, México: ICME, 2008. p. 01-08.

MARQUES, M.; GUIMARÃES, G.; GITIRANA, V. Compreensão de alunos e professores sobre média aritmética. **Bolema**, Rio Claro, v. 24, n. 40, p. 725-745, dez. 2011.

MUNIZ, C. A. **Brincar e jogar**: enlacs teóricos e metodológicos no campo da educação matemática. Belo Horizonte: Autêntica, 2010. 145p.

PONTE, J. P.; FONSECA, H. Orientações curriculares para o ensino da estatística: análise comparativa de três países. **Quadrante**, local, v. 10, n. 1, p. 93-115, 2001.

SÃO PAULO. **Proposta curricular do estado de São Paulo**: matemática - ensino fundamental - ciclo II e ensino médio. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. São Paulo: SEE, 2008. 59p.

SÃO PAULO. **Caderno do professor**: matemática. Secretaria da Educação do Estado de São Paulo. Ensino médio – 3ª série, v. 4. São Paulo: SEE, 2009. 56p.

STRAUSS, S.; BICHLER, E. The development of children's concepts of the arithmetic average. **Journal for Research in Mathematics Education**, Reston, v. 19, n. 1, p. 64-80, 1988.

## ANEXO 1 - Situações – problema

Apresentamos, neste anexo, alguns problemas envolvendo situações do jogo MEDVAR, que podem ser trabalhados com o objetivo de fortalecer e fixar os conceitos de média e de variância. Entendemos que o professor pode permitir o uso de calculadoras na resolução desses problemas. Consideramos, neste nível de escolaridade, ser importante saber calcular a média e a variância, mas mais importante do que saber

calcular é saber interpretar esses conceitos. O jogo aqui proposto exige esse tipo de interpretação, quando das escolhas mais adequadas para cada jogada.

*Problema 1.* Após uma rodada do jogo MEDVAR, o Jogador 1 obteve o resultado (3, 3, 3, 4, 5) e o Jogador 2 obteve (1, 1, 5, 5, 6). Quem fez a melhor jogada? Por quê?

*Problema 2.* No jogo MEDVAR, qual o menor valor possível para a média? Justificar sua resposta.

*Problema 3.* No jogo MEDVAR, qual o maior valor possível para a média? Justificar sua resposta.

Das soluções dos problemas 2 e 3, concluímos que, no jogo MEDVAR, o valor da média será um número real do intervalo  $[1, 6]$ .

*Problema 4.* No jogo MEDVAR, o jogador poderá obter para a média o valor 3,5? Justificar sua resposta.

*Problema 5.* No jogo MEDVAR, o jogador poderá obter para a média o valor 4,2? Justificar sua resposta.

*Problema 6.* No jogo MEDVAR, o jogador poderá obter para o valor da média uma dízima periódica? Justificar sua resposta.

O *problema 7* explora noções elementares de contagem.

*Problema 7.* Em quantos casos do jogo MEDVAR o jogador poderá obter, para o valor da média, um número inteiro? Justificar sua resposta.

O *problema 8* explora noções elementares de probabilidade.

*Problema 8.* No jogo MEDVAR, o jogador terá mais chances de obter, para a média, um número par ou ímpar? Justificar sua resposta.

*Problema 9.* No jogo MEDVAR, qual o menor valor possível para a variância? Justificar sua resposta.

*Problema 10.* No jogo MEDVAR, o valor da variância pode ser igual a 6? Em caso afirmativo, indicar dois casos onde isso ocorre.

Como, por definição, a variância é uma soma de quadrados, sua unidade de medida também é ao quadrado. Como exemplo, se os valores estão representados em centímetros, a unidade da variância será em centímetros ao quadrado. Para evitar este inconveniente, definimos o *desvio padrão* como a raiz quadrada positiva da variância, que possui a mesma unidade de medida da média. Isso facilita as comparações, as interpretações e as inferências estatísticas dos resultados.

*Problema 11.* No jogo MEDVAR, o valor da média pode ser maior do que o do desvio padrão? Justificar sua resposta.

*Problema 12.* No jogo MEDVAR, o valor da média pode ser igual ao do desvio padrão? Justificar sua resposta.