Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES VIRTUAIS: O QUE OS ALUNOS PODEM APRENDER DISCUTINDO RELAÇÕES COMBINATÓRIAS?[1]

BUILDING VIRTUAL TREES OF POSSIBILITIES: WHAT CAN STUDENTS LEARN BY DISCUSSING COMBINATORIAL RELATIONS?

Juliana Azevedo [2]; Rute Elizabete de Souza Rosa Borba[3]
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE, Brasil (UFPE)

Resumo
Objetivando analisar a influência da construção de *árvores de possibilidades* na resolução de problemas combinatórios com o uso de um *software educativo*, a presente pesquisa se fundamentou na Teoria dos Campos Conceituais de Vergnaud (1986), que defende a existência de três dimensões fundamentais de conceitos: significados, invariantes e representações simbólicas. Para isso, participaram da pesquisa 20 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública municipal do Recife, divididos em dois grupos. Os alunos participaram de um pré-teste, de distintas formas de intervenção e de pós-testes (imediato e posterior). O Grupo 1 (G1) construiu *árvores de possibilidades* fazendo uso do *software Diagramas de Árbol* e o Grupo 2 (G2) formou o Grupo Controle Assistido que trabalhou com problemas multiplicativos não combinatórios, por meio de *desenhos*. Com apenas uma sessão de intervenção foi possível obter avanços de alunos de anos iniciais do grupo experimental. O uso do *software* possibilitou avanços na compreensão de diferentes significados combinatórios, levando os alunos a refletirem sobre relações e propriedades das distintas situações. Conclui-se que é possível o trabalho com variados tipos de situações combinatórias desde os anos iniciais e por meio de representações simbólicas eficientes, como a árvore de possibilidades virtual. Deseja-se, assim, com essa pesquisa, contribuir para a reflexão sobre melhores possibilidades de ensino da Combinatória nos anos iniciais do Ensino Fundamental.
Palavras-chave: Combinatória; Árvores de possibilidades; *Software Diagramas de Árbol*; Anos iniciais do Ensino Fundamental.

Abstract
With the aim of analysing the influence of building trees of possibilities in solving combinatorial problems with the use of an *educational software*, this research was based on the Theory of Conceptual Fields by Vergnaud (1986), which argues that there are three fundamental dimensions of concepts: meanings, symbolic representations and invariants. The participants were 20 5th grade students in the Elementary School of two public schools in the city of Recife, divided into two groups. Students participated in a pre-test, in different forms of intervention and in post-tests (immediate and delayed). Group 1 (G1) constructed *trees of possibilities* making use of the "*Diagramas de Árbol" software* and Group 2 (G2) formed the assisted control group who worked with multiplicative but not combinatorial problems, through *drawings*. With just one intervention session, significant quantitative and qualitative improvements were achieved by students of early years of the experimental group. The use of the software enabled advances in understanding different combinatorial meanings, leading students to reflect on relationships and properties of different situations.
It is concluded that it is possible to work with different kinds of combinatorial situations since the Early Years and through efficient symbolic representations, such as the virtual tree of possibilities. Therefore, the research aims to contribute to the debate about the best possibilities of Combinatorics learning in the Early Years of Elementary School.
Keywords: Combinatorics; Trees of possibilities; "*Diagramas de Árbol" Software*; Early Years of Elementary School.

---

[1] Projeto parcialmente financiado pela Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES); pela Fundação de Amparo à Ciência e Tecnologia do Estado de Pernambuco – FACEPE – (APQ-1095-7.08/08) e pelo Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (MCT/CNPq – 476665/2009-4).
[2] Mestranda do EDUMATEC – Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica – UFPE; e Auxiliar de Coordenação na Escola Arco-Íris. email: azevedo.juliana1987@gmail.com
[3] PhD (Oxford Brookes University). Líder do GERAÇÃO e professora da UFPE. email: borba@talk21.com

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

CONSTRUINDO ÁRVORES DE POSSIBILIDADES VIRTUAIS: O QUE OS ALUNOS PODEM APRENDER DISCUTINDO RELAÇÕES COMBINATÓRIAS?

1. Introdução

No ensino atual da Matemática defende-se esta disciplina como sendo muito rica na possibilidade de desenvolvimento do raciocínio lógico-matemático e hipotético-dedutivo dos alunos. Inhelder e Piaget (1976, p.241) assinalam que o desenvolvimento desse nível de raciocínio está relacionado com a “dissociação entre o possível, o real e o necessário”, e vinculado a um nível do pensamento relacionado à Combinatória e Probabilidade.

A presente pesquisa se apoia no estudo da Combinatória, enfatizando que, o trabalho com situações que envolvam esse pensamento, desde os anos iniciais de escolarização, pode ser útil para que o aluno seja incentivado a pensar em relações e em possibilidades. Isso porque na Combinatória há uma rica variedade de situações – que envolvem diversos contextos e variadas propriedades e relações e que podem ser representadas e trabalhadas com auxílio de diferentes simbologias – que podem levar o aluno a pensar em formas diversas de resolução de problemas, na essência do que seja um problema matemático (BORBA, 2010).

Maher e Yankelewitz (2010) também ressaltam a importância do estudo da Combinatória em anos inicias da escolarização, num estudo no qual crianças construíram esquemas organizacionais que facilitaram a resolução de problemas combinatórios. Nesse estudo longitudinal, que acompanhou crianças de 2ª e 3ª séries, as crianças desenvolveram formas de encontrar padrões, de serem sistemáticas, de abstraírem e de generalizarem resultados.

Para o ensino de Combinatória, tem-se, dentre as possíveis representações simbólicas a construção de *árvores de possibilidades* (FISCHBEIN, 1975; FISCHBEIN; PAMPU; MINZAT, 1970) e o presente estudo aborda a resolução de problemas combinatórios por meio desta representação construída no computador com um *software* (*Diagramas de Árbol*), como recurso facilitador da aprendizagem. Acredita-se que essa representação simbólica possibilita que se entenda diferentes relações combinatórias, sendo possível, assim, trabalhar os variados tipos de problemas combinatórios, observando-se as semelhanças e diferenças entre eles.

Vale ressaltar que, na resolução de problemas combinatórios por meio do *software*, as relações combinatórias são destacadas com maior ênfase depois que o *software* gera a árvore, no momento da validação dos casos possíveis. O destaque para as relações combinatórias, em diferentes situações, por meio da representação *árvore de possibilidades* está em conformidade com o pensamento de Vergnaud (1986), pois ele enfatiza que o aprendizado de todo conceito ampara-se em três dimensões fundamentais: as situações que dão *significado* ao conceito (S); as relações e propriedades *invariantes* desse conceito (I) e as *representações simbólicas* que são usadas para representar o conceito (R).

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Desta forma, acreditava-se que a construção de árvores ligada ao uso de um *software* educativo permitisse avanços significativos no aprendizado deste conteúdo, uma vez que a utilização do *software* em questão permite a visualização de todas as possibilidades, sem a necessidade do esforço para a construção da árvore.

Assim, propôs-se a presente pesquisa, na qual se buscava confirmar a hipótese que um *software* educativo no qual árvores de possibilidades são construídas virtualmente pode servir de desenvolvimento do raciocínio combinatório por propiciar reflexões sobre variadas situações combinatórias, sobre as relações e propriedades nelas presentes, bem como pelo fato da representação ser gerada pelo computador para validação pelo aprendiz.

2. A TECNOLOGIA A FAVOR DA EDUCAÇÃO MATEMÁTICA

A sociedade atualmente utiliza as tecnologias informáticas de forma bastante diversificada, em usos pessoais e coletivos – profissionais, comunicacionais e de lazer, dentre outros. A tecnologia também é bastante utilizada no âmbito educativo de maneira cada vez mais intensa. Segundo Borba e Penteado (2010, p.13) “sempre há uma dada mídia envolvida na produção de conhecimento”.

Nesse contexto, Borba e Penteado (2010, p.12) destacam que há muitas discussões sobre o uso de tecnologias informáticas em sala de aula, principalmente em torno da real aprendizagem dos alunos que utilizam essa ferramenta. Os autores supracitados evidenciam que, há argumentos contrários à sua utilização, enfatizando que educadores indagam “Se um estudante do Ensino Médio aperta uma tecla do computador e o gráfico da função já aparece, como ele conseguirá, ‘de fato’, aprender a traçá-lo?”. Em contrapartida a esse argumento, os autores perguntam: “Será que o aluno deveria evitar o uso intensivo de lápis e papel para que não fique dependente dessas mídias?”. Sendo assim, alguns professores atualmente vêm sendo capacitados, na formação inicial e em formações continuadas, a trabalhar fazendo uso de diversas tecnologias, incluindo as tecnologias informáticas, principalmente por meio do uso do computador.

Valente (1997, p.1) enfatiza que “[...] o uso inteligente do computador não é um atributo inerente ao mesmo, mas está vinculado à maneira como nós concebemos a tarefa na qual ele será utilizado”. Desse modo, o uso de computador também pode facilitar e dar subsídios, por meio do auxilio da tecnologia, na resolução de problemas propostos, possibilitando, assim, o desenvolvimento conceitual.

Uma das ferramentas, para que se possa trabalhar com o computador no ensino, é fazendo uso de *softwares educativos*. Estes, de acordo com Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009, p.4), “[...] consistem em programas para computador com o objetivo de contribuir para aquisição da aprendizagem, com fundamentação pedagógica”. Não somente no campo da Matemática, mas também de outras áreas do conhecimento, é necessário que haja algumas preocupações no que diz respeito a certos aspectos dos *softwares educativos* e Gomes, Castro Filho, Gitirana, Spinillo, Alves, Melo e Ximenes (2002, p. 2),

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

enumeram a importância dos seguintes aspectos: "[...] consistência da representação, usabilidade, qualidade da interface, qualidade do *feedback*".

Acreditando no potencial de um *software* específico, na presente pesquisa se propôs investigar o efeito de intervenções pedagógicas no desempenho com o uso do mesmo. Assim, pretendia-se que as crianças participantes da pesquisa desenvolvessem seus raciocínios combinatórios.

3. O *SOFTWARE DIAGRAMAS DE ÁRBOL* E AS RELAÇÕES COMBINATÓRIAS: A CONSTRUÇÃO DE ÁRVORES DE POSSIBILIDADES VIRTUAIS

A Combinatória é vista em sala de aula primordialmente no Ensino Médio por meio de uso direto de fórmulas ou superficialmente no fim dos anos iniciais do Ensino Fundamental – quarto e quinto ano – de maneira não sistemática. Porém, a aprendizagem nos anos iniciais pode acontecer por meio de estratégias sistemáticas, que não visem o uso de fórmulas.

Dentre as variadas ferramentas que possibilitam explorar os conteúdos matemáticos e desenvolver seus conceitos, têm-se os *softwares* educativos. Quando é trabalhado algum conteúdo utilizando este recurso, o aluno pode aprimorar conceitos já em construção, pode manusear, de maneira exploratória, conceitos ainda não desenvolvidos, estimulando, assim, seu raciocínio. O aluno, ao utilizar um recurso tecnológico, poderá também levantar algumas relações hipotéticas e pode se deparar com situações que exijam fazer certas articulações entre o intuitivo e o concreto. Dessa forma, o aluno, por meio do uso da tecnologia, poderá manusear quase concretamente as situações.

Entretanto, mesmo sabendo da importância do uso de *softwares*, ainda é considerada escassa a produção de *softwares* voltados para o Ensino Fundamental e, principalmente, a respeito da Combinatória. Assim, poucas opções são oferecidas ao professor que deseja trabalhar situações combinatórias com o computador. Vale ressaltar ainda, que, no *site* do MEC, encontram-se alguns poucos objetos de aprendizagem[4] voltados para o Ensino da Combinatória (RIVED, 2008 – *Combinação, Arranjo* e *Permutação*). Porém, esses objetos de aprendizagem já foram examinados por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) e nesta análise as autoras ressaltam que os mesmos atendem isoladamente a distintos tipos de problemas combinatórios e levam, preferencialmente, à utilização de uma linguagem de fórmulas.

A partir do estudo de Sandoval, Trigueiros e Lozano (2007), foi possível localizar o *software Diagramas de Árbol* – Figura 1 (AGUIRRE, 2005)[5]. Este *software* foi analisado por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) e utilizado por Ferraz, Borba e Azevedo (2010), e Azevedo, Costa e Borba (2011) em estudos com a finalidade de investigar o aprendizado da Combinatória por meio

[4] Entende-se *objeto de aprendizagem* (OA) como uma unidade de instrução tecnológica reutilizável. Caracteriza-se por ser de pequena extensão e de fácil manipulação. No caso dos objetos de aprendizagem identificados por Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) – *Combinação* (RIVED, 2008), *Permutação* (RIVED, 2008) e *Arranjo* (RIVED, 2008) – são tratados significados específicos dentro da Combinatória, respectivamente *combinações*, *permutações* e *arranjos*.

[5] O *software Diagramas de Árbol* não se trata de um *software livre*, este foi concedido pelas autoras (SANDOVAL, TRIGUEIROS e LOZANO, 2007) para uso pelo Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (Geração).

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

deste recurso. O presente estudo visa confirmar e ampliar achados desses estudos anteriores com o referido *software*.

Figura 1: Página de abertura do *software Diagramas de Árbol*

Fonte: AZEVEDO, Juliana. 2013

Leite, Pessoa, Ferraz e Borba (2009) enfatizam que se devem explorar, no início do trabalho com o raciocínio combinatório, as representações menos formais para, somente depois, introduzir o uso de fórmulas, possibilitando "[...] o uso de diferentes tipos de representações, como: árvores de possibilidades, tabelas, forma pictórica, diagramas, etc., ao invés de propor somente a fórmula como forma de representação".(p.9) Sendo assim, é importante que o *software* seja utilizado com sua base de representação que antecede às fórmulas, aproveitando o caráter lúdico de seus registros, como é o caso do *software Diagramas de Árbol*. Ferraz, Borba e Azevedo (2010) discutem as potencialidades do uso do *software*, como por exemplo, a organização das possibilidades. As autoras também apontam limitações, tais como o idioma (espanhol), a não visualização de todas as possibilidades em determinados problemas (quando é elevado o número de possibilidades) e, principalmente, a falta de *feedback* para o aluno.

Cada tipo de problema combinatório tem relações específicas – chamadas por Vergnaud (1986) de *invariantes*. Para Vergnaud, os *invariantes* são fundamentais para o desenvolvimento de conceitos, uma vez que os mesmos são desenvolvidos em *campos conceituais* e se articulam por relações em comum (VERGNAUD, 1986). Pessoa e Borba (2009a) destacam os *invariantes* das situações combinatórias, sendo o primeiro invariante relacionado às escolhas dos elementos que comporão as distintas possibilidades e o segundo invariante relacionado à ordenação dos elementos, ou seja, se a ordem em que os elementos estão dispostos no conjunto irá gerar novas possibilidades, ou não.

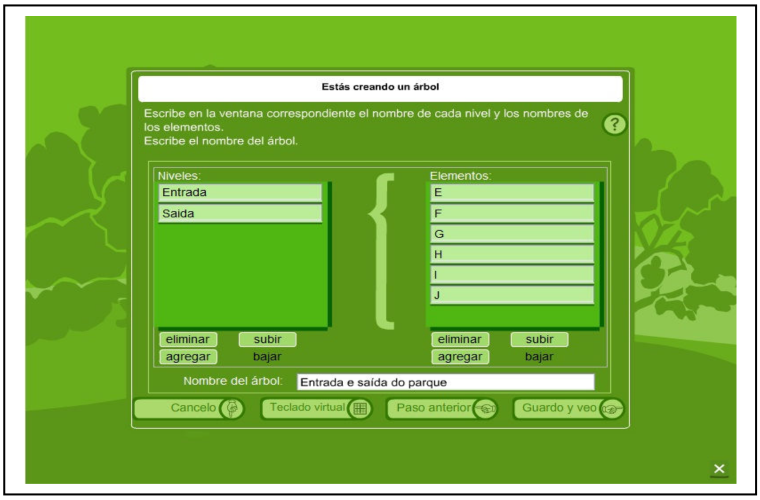
Ressalta-se que as relações combinatórias (os *invariantes* da Combinatória) podem ser trabalhadas por meio da análise de diagramas de árvores, em particular as construídas virtualmente. Assim, na terceira tela do *software Árbol* é possível escolher os níveis e os elementos que a pergunta da questão de Combinatória indica e, a partir daí, é possível visualizar na tela seguinte todas as possibilidades para a resolução da questão e podem-se

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

destacar as que são válidas, conforme a ordem de apresentação de seus elementos.

Em questões de *produto cartesiano*, como, por exemplo, *Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?*, os níveis da situação são os conjuntos de entrada e saída do parque e os elementos são todos os objetos dos conjuntos, simbolizados pelas letras de cada entrada e saída. Gera-se, nesse caso do parque de diversões, um total de 24 possibilidades (como mostrado parcialmente nas Figuras 2 e 3).

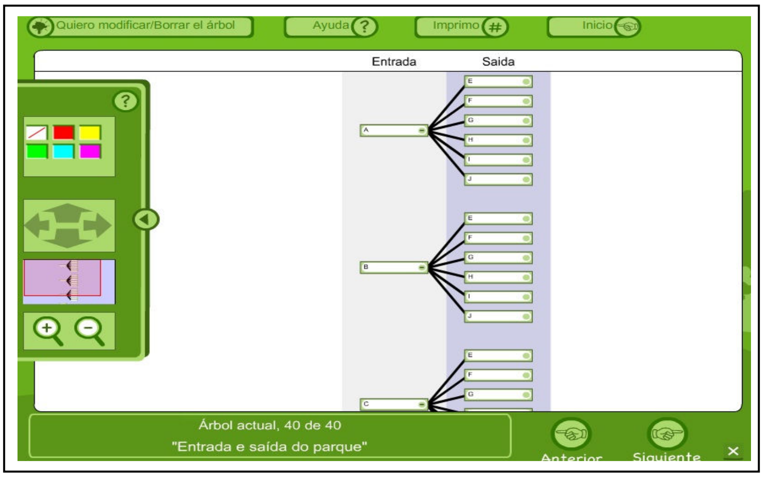
Figura 2: Página de escolha de níveis e elementos de um *produto cartesiano* no *Diagramas de Árbol*



Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

A partir desse exemplo, observa-se que os *invariantes* de *produtos cartesianos* são: Invariante 1 – Elementos de dois (ou mais) conjuntos diferentes irão formar um novo conjunto; Invariante 2 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Figura 3: Árvore de possibilidades de um *produto cartesiano* no *Diagramas de Árbol*

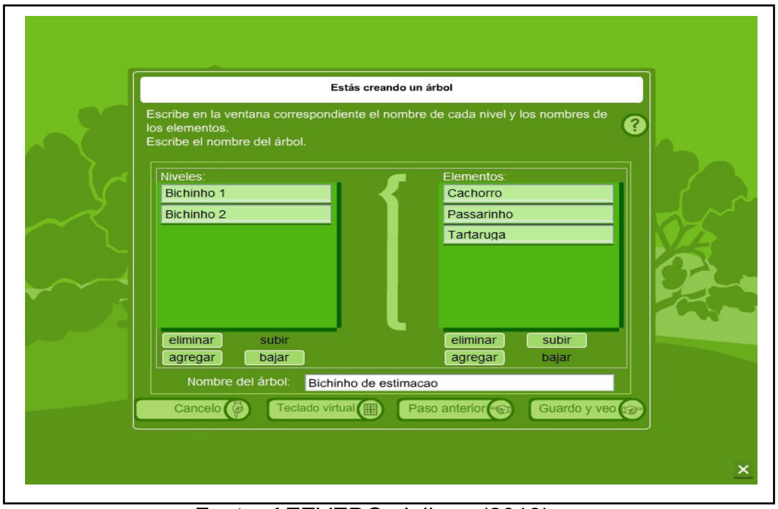


Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Em questões de *combinação*, como, por exemplo: *Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?*, os níveis da situação correspondem à quantidade de bichinhos que serão escolhidos. Assim, como a questão solicita a escolha de dois bichinhos, têm-se dois níveis. Os elementos são os animais que podem ser escolhidos. Há, nesse caso da loja de bichinhos, um total de três possibilidades (geradas e selecionadas, conforme se pode observar nas Figuras 4 e 5).

Figura 4: Página de escolha de níveis e elementos de uma *combinação* no *Diagramas de Árbol*



Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Os *invariantes* da *combinação*, como se pode observar a partir do exemplo apresentado, são: Invariante 1 – A escolha de alguns elementos de um conjunto maior gera subconjuntos; Invariante 2 – A ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

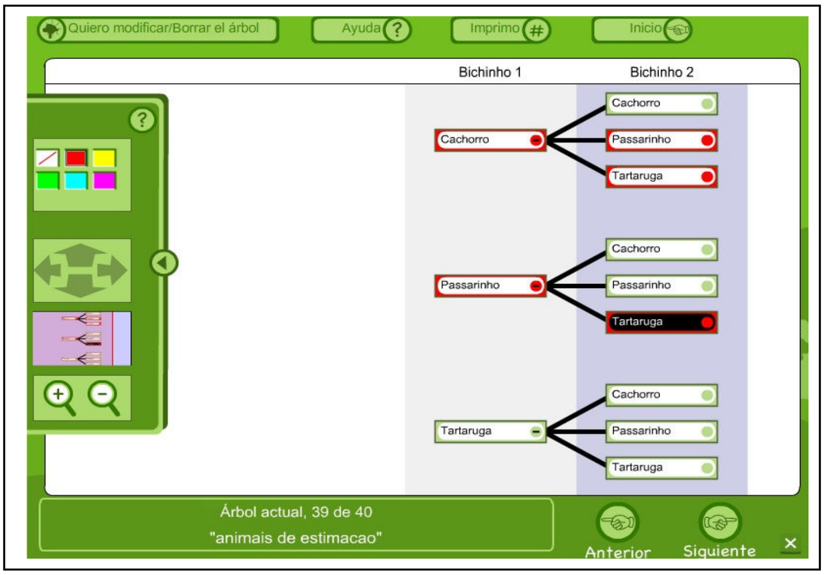
Observando a Figura 5, é possível verificar que a situação apenas é solucionada com a validação dos casos possíveis, destacados na cor vermelha. Esta validação deve ser feita pelo usuário, no momento em que o *software* disponibiliza todos os casos da situação, sejam eles possíveis ou não. Na situação de *combinação* apresentada não é possível escolher dois animais iguais e a ordem desses animais não é uma nova possibilidade. Desse modo, não são validados os casos “cachorro e cachorro”; “passarinho e passarinho”; “tartaruga e tartaruga”; “passarinho e cachorro” (o mesmo que “cachorro e passarinho”); “tartaruga e cachorro” (o mesmo que “cachorro e tartaruga”) e “tartaruga e passarinho” (o mesmo que “passarinho e tartaruga”).

Em questões de *arranjo*, como, por exemplo: *Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?*, os níveis da situação consistem nas possíveis primeiras e segundas letras de cada placa e os elementos são todas as letras disponíveis para formá-la. Gera-se, no caso das

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

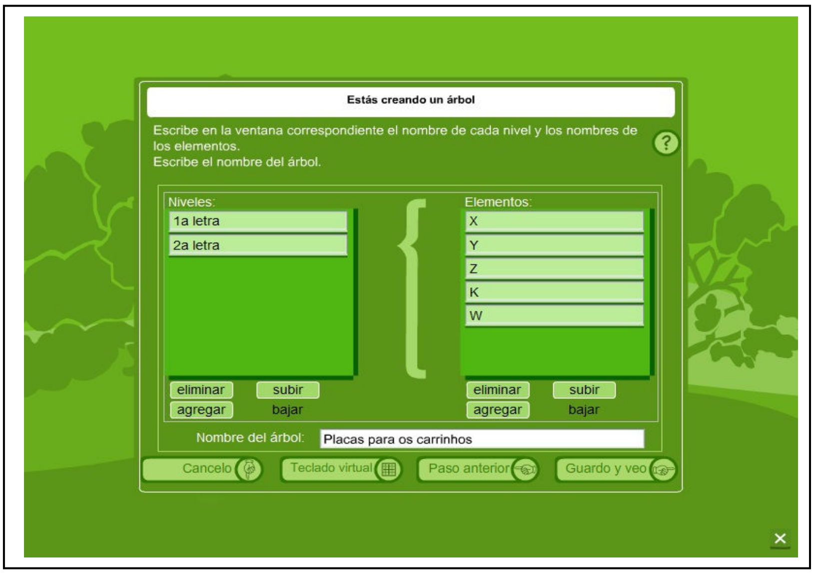
placas, um total de 20 possibilidades (conforme se pode observar parcialmente nas Figuras 6 e 7).

Figura 5: Árvore de possibilidades de uma combinação no *Diagramas de Árbol*



Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Figura 6: Página de escolha de níveis e elementos de um *arranjo* no *Diagramas de Árbol*



Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

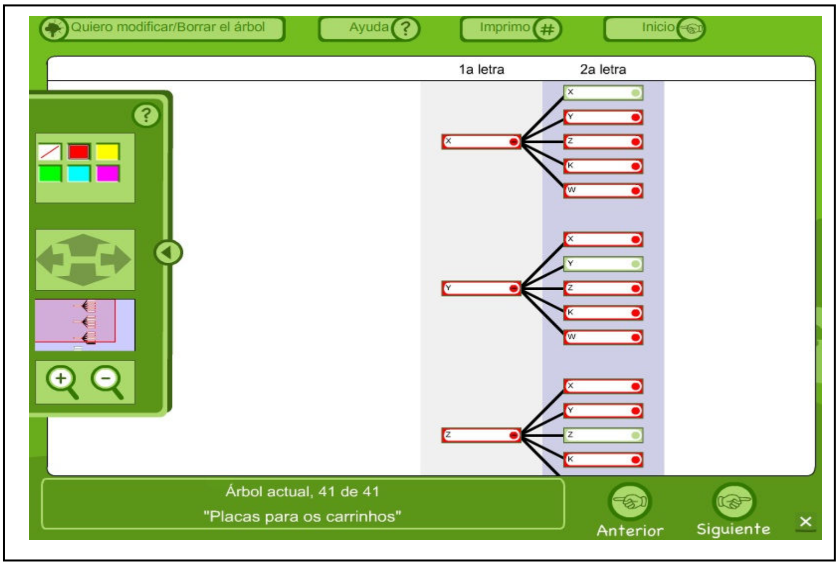
Assim, é possível observar que os invariantes do *arranjo* são: Invariante 1 – A escolha de alguns elementos de um conjunto maior gera subconjuntos; Invariante 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Na Figura 7 também é possível verificar que a situação apenas é solucionada com a validação dos casos possíveis, destacados na cor vermelha. Na situação de *arranjo* apresentada não é possível escolher duas letras iguais na mesma placa, uma vez que, se uma letra já é a primeira da placa, a mesma não

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

pode ser a segunda, conforme a condição colocada. Desse modo, não são validados os casos “X e X”; “Y e Y”; “Z e Z”, dentre outras.

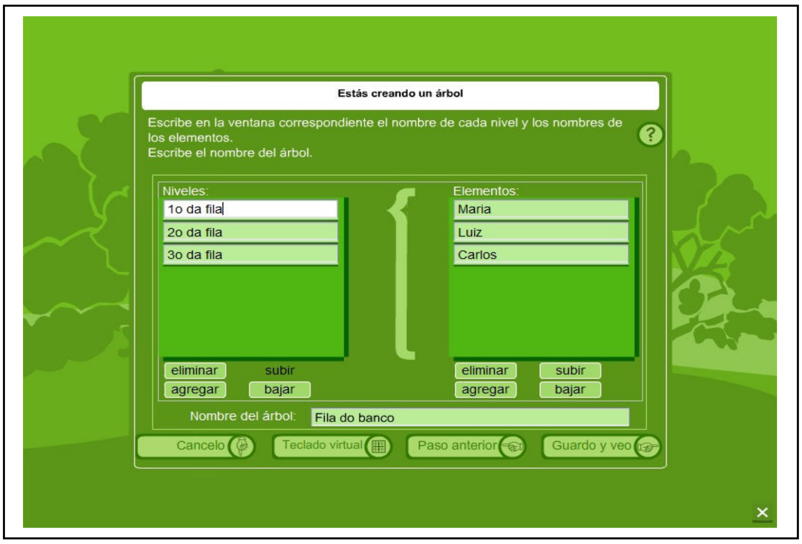
Figura 7: Árvore de possibilidades de um *arranjo* no *Diagramas de Árbol*



Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Em questões de *permutação,* como, por exemplo: *De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?*, os níveis correspondem ao lugar em que cada pessoa pode ocupar na fila (1º, 2º ou 3º lugar da fila) e os elementos são as três pessoas que irão ocupar esses lugares. Esta situação gera um total de seis possibilidades (como pode ser parcialmente observado nas Figuras 8 e 9).

Figura 8: Página de escolha de níveis e elementos de uma *permutação* no *Diagramas de Árbol*



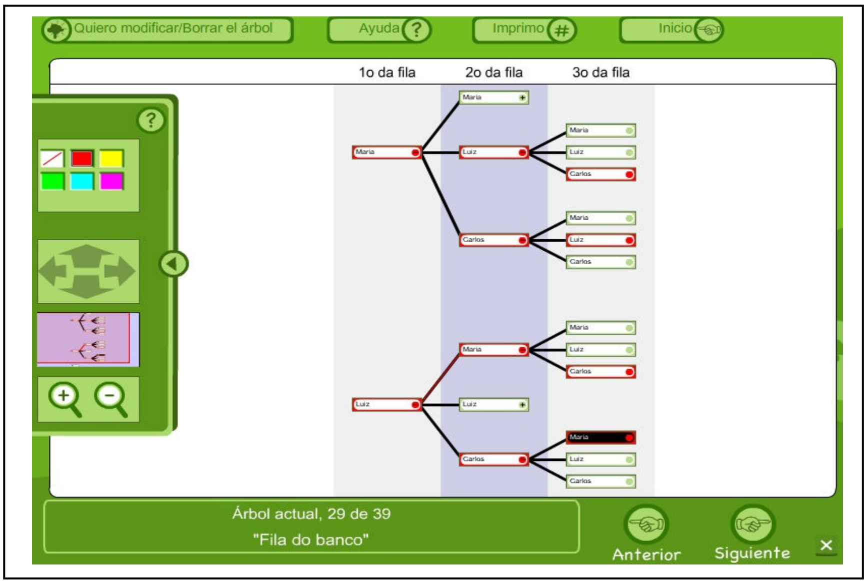
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Observa-se, assim, que os invariantes da permutação são: Invariante 1 – Todos os elementos de um conjunto são utilizados; Invariante 2 – A ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Também é possível verificar, observando-se a Figura 9, que a resposta apenas é encontrada com a validação dos casos possíveis, destacados na cor vermelha. Na situação de *permutação* apresentada não é possível escolher as mesmas três pessoas para ocupar os três lugares da fila, uma vez que, se uma pessoa já é a primeira da fila, a mesma não pode ser a segunda, nem a terceira. Desse modo, não são validados os casos em que se repetem as pessoas da fila. Por exemplo: “Maria, Maria e Maria”; “Luís, Luís e Luís”; “Carlos, Carlos e Carlos”; “Maria, Luís e Maria”; “Maria, Luís e Luís”; dentre outros.

Figura 9: Árvore de possibilidades de uma *permutação* no *Diagramas de Árbol*



Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Assim, o *software Diagramas de Árbol* foi escolhido para o processo de ensino, ou seja, uma intervenção, do estudo aqui relatado por possibilitar o trabalho com os diversos tipos de problemas combinatórios, por usar uma representação válida para todos os tipos, por não estimular o ensino de fórmulas e por possibilitar chamar atenção dos diversos invariantes das situações combinatórias.

4. OBJETIVOS E MÉTODO

4.1 Objetivos

4.1.1 Objetivo Geral

- Analisar a influência da construção de árvores de possibilidades na resolução de problemas combinatórios.

4.1.2 Objetivos Específicos

- Investigar o efeito de intervenções pedagógicas, por meio da construção de árvores de possibilidades com uso do *software Diagramas de Árbol*, no desempenho em problemas combinatórios;

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

- Verificar os desempenhos de alunos em relação aos tipos de problemas combinatórios.

4.2 Método

O presente estudo foi realizado com 20 alunos do 5º ano do Ensino Fundamental de duas escolas da rede pública Municipal do Recife. A escolha foi baseada, principalmente no fato de que alunos deste ano já aprenderam sobre as estruturas multiplicativas e possuem maior autonomia na leitura e interpretação dos enunciados. Não era objetivo comparar duas escolas, e sim, observar espaços escolares diferenciados. Foi realizado, em ambas as escolas, inicialmente um pré-teste, seguido de intervenção com utilização do *software Diagramas de Árbol*, realizadas em um encontro, e, finalmente, pós-testes, que permitiram avaliar os avanços obtidos por meio das intervenções realizadas.

Durante a intervenção os alunos trabalharam em duplas, pois se acredita que as interações entre as crianças podem contribuir para a compreensão da Matemática, em particular no desenvolvimento do raciocínio combinatório. As duplas foram distribuídas em dois grupos distintos. O primeiro grupo (G1), o Grupo Experimental, trabalhou em duplas com o *software Diagramas de Árbol* – no qual são construídas no computador árvores de possibilidades; O segundo grupo (G2) formou o Grupo Controle que, em duplas, trabalhou problemas multiplicativos (excluindo-se os de Combinatória) por meio de desenhos – que configuram uma forma de representação bastante utilizada nas resoluções de questões combinatórias. Dessa forma, pretendia-se observar se a instrução em problemas de estruturas multiplicativas – não de Combinatória – seria suficiente para o avanço de desempenho em situações combinatórias do pós-teste, ainda que estas não tivessem sido trabalhadas com os alunos desse grupo.

No pré-teste os alunos responderam oito situações-problema de Combinatória, como pode ser visto a seguir no Quadro 1, sendo duas questões para cada tipo de problema: *produto cartesiano, arranjo, combinação* e p*ermutação*. As questões foram adaptadas de um estudo anterior (AZEVEDO; COSTA; BORBA, 2011), no qual se optou por explicitar as opções a serem escolhidas, como forma de facilitar a resolução dos problemas.

Essas questões também foram trabalhadas na intervenção do grupo que trabalhou a Combinatória com o *software*. Desse modo, no processo de intervenção, as questões do pré-teste foram usadas, visando comparar as respostas anteriores, com o intuito de que os alunos percebessem os seus erros e acertos nas questões.

As questões que foram propostas para os alunos do segundo grupo (com intervenção em estruturas multiplicativas não combinatórias), que podem ser vistas no Quadro 2, foram baseadas na classificação sugerida por Nunes e Bryant (1997). A lista de questões destinada a este grupo foi composta por oito situações-problema, sendo duas questões para o tipo *multiplicação*, duas questões do tipo *problema inverso da multiplicação*[6], duas questões para *relação entre variáveis – co-variação –* e duas questões de *distribuição*[7]. O único tipo de problema, abordado por Nunes e Bryant (1997), que não foi incluído foi o de

[6] Este tipo de problema também é conhecido como '*quotição*'.
[7] Este tipo de problema também é conhecido como '*partição*'.

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

produto cartesiano, relacionado à ideia de Combinatória, que não foi abordada por este grupo.

Quadro 1: Problemas do pré-teste (dos dois grupos) e trabalhados na intervenção do Grupo 1 (experimental, com *software*)

Produto Cartesiano:

1. Numa lanchonete há três tipos de suco (laranja, morango e abacaxi). Eles são servidos em copos de dois tamanhos (pequeno e grande). De quantas maneiras diferentes pode-se tomar um suco de um sabor e um tamanho de copo?
2. Para entrar no parque de diversões, João pode passar por quatro portões de entrada (A, B, C e D). Depois que João se divertir nos brinquedos do parque, ele poderá ir para casa passando por seis saídas diferentes (E, F, G, H, I e J). De quantas maneiras diferentes ele poderá entrar e sair do parque?

Combinação:

3. Na loja de bichos de estimação há para vender três animais (um cachorro, um passarinho e uma tartaruga). Marcelo quer comprar dois bichinhos. De quantas maneiras diferentes ele pode escolher dois bichinhos?
4. Márcia tem em casa sete frutas (mamão, pera, abacaxi, laranja, banana, jaca e uva) e quer fazer uma salada usando duas dessas frutas. De quantas maneiras diferentes ela pode combinar essas frutas?

Arranjo:

5. Três crianças (Pedro, Márcia e Léo) estão disputando uma corrida no *Play Station*. De quantas maneiras diferentes pode-se ter o 1º e 2º lugares?
6. Edinho tem alguns carrinhos e quer colocar placas neles. Ele quer usar cinco letras (X, Y, Z, K e W) e vai escrever duas letras em cada placa. Quantas são todas as possibilidades de placas que Edinho pode fazer, sem que as letras se repitam?

Permutação:

7. De quantas maneiras diferentes três pessoas (Maria, Luís e Carlos) podem posicionar-se numa fila do banco?
8. Tenho quatro bolas nas cores verde, marrom, amarela e rosa. Comprei uma caixa com quatro compartimentos e quero colocar cada bola em um desses compartimentos. De quantas maneiras diferentes posso organizar a caixa?

Fonte: Azevedo, Costa e Borba, 2011 (adaptado).

Quadro 2: Problemas trabalhados na intervenção com o Grupo 2 (controle, estruturas multiplicativas não combinatórias)

Multiplicação:

1. Uma casa tem um quarto, uma cozinha, um banheiro e uma sala, fazendo um total de quatro cômodos. Cada cômodo tem duas janelas. Quantas janelas há na casa?
2. Um carro tem quatro rodas. Quantas rodas há em seis carros?

Problema inverso da multiplicação (quotição):

3. A professora do terceiro ano comprou quinze livros e fará um sorteio entre os alunos da sua turma. Ela decidiu que cada aluno sorteado receberá cinco livros. Quantos alunos poderão receber o prêmio?
4. João tem quarenta bolinhas de gude e pretende dar duas bolinhas para cada um de seus amigos. Para quantos amigos João pode dar suas bolinhas?

Relação entre variáveis – co-variação

5. Pedro quer comprar oito pirulitos. Cada pirulito custa R$1,25. Quanto Pedro gastará com os pirulitos?
6. D. Isabel faz um vestido com 2,50 metros de tecido. Quanto de tecido ela usará para fazer nove vestidos?

Distribuição (partição)

7. Ana tem trinta figurinhas e quer distribuí-las entre as suas seis primas. Quantas figurinhas cada prima de Ana irá receber?
8. Fui ao mercado de artesanato e paguei R$ 60,00 reais por três chapéus. Quanto custou cada chapéu?

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Após cinco dias do processo de intervenção, foi aplicado com os alunos as questões referentes a um pós-teste imediato, objetivando verificar os avanços obtidos por meio da intervenção realizada. Nove semanas após os processos de intervenção foi realizado, com os alunos presentes[8], um pós-teste posterior, com questões semelhantes às do pré e pós-teste imediato. A aplicação deste teste objetivou observar a retenção do aprendizado do grupo experimental, verificando se, com o passar do tempo, a aprendizagem foi apenas pontual ou permanente.

Foi realizada uma análise quantitativa das questões acertadas pelos 20 alunos da pesquisa, diferenciando-se o número de questões acertadas no pré-teste e nos pós-testes (imediato e posterior). Foram realizadas três comparações: 1) os acertos antes e depois do processo de intervenção, 2) os acertos nos pós-testes dos grupos com (G1) e sem intervenção em Combinatória (G2) e 3) os acertos por tipo de problema antes e depois do processo de intervenção. Todas essas análises foram realizadas com suporte do *Statistical Package for the Social Sciences* – SPSS.

Análises qualitativas acompanharam as quantitativas, buscando possíveis explicações para os melhores desempenhos do grupo experimental. Acredita-se, dessa forma, que análises quantitativas direcionaram o olhar para os destaques em desempenhos e as análises qualitativas auxiliaram na busca de explicações para as diferenças de desempenho observadas.

5. RESULTADOS: o uso do *software* diagramas de árbol

5.1 Pré-teste: Sondando os conhecimentos iniciais dos alunos

5.1.1 Acertos em problemas combinatórios no pré-teste.

Após a aplicação do pré-teste, foi decidido classificar o erro e o acerto das crianças segundo alguns critérios de pontuação, para qualificar o desempenho além de mero erro ou acerto pleno. A pontuação foi dividida em quatro níveis crescentes, iniciando pelo erro do aluno, passando por acertos parciais e terminando no acerto total da questão. No Quadro 3, é possível visualizar os tipos de resposta, com sua respectiva pontuação e descrição.

Quadro 3: Níveis crescentes de pontuação por tipo de resposta

Tipo de resposta	Pontuação	Descrição
Resposta errada	0 ponto	Não apresenta relação com Combinatória, ou seja, na sua resolução a criança não aponta indícios de compreensão do problema proposto.
Resposta parcialmente correta 1	1 ponto	Escolhe apenas um caso, ou seja, a criança escolhe apenas uma possibilidade, não indicando perceber que podem existir outras.
Resposta parcialmente correta 2	2 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, mas limita os casos ao número de elementos de uma das quantidades citadas no problema.
Resposta parcialmente correta 3	3 pontos	Enumera alguns casos, ou seja, percebe que pode haver mais de um caso, não limita ao número de uma das quantidades citadas, mas não consegue esgotar todas as possibilidades.
Resposta correta	4 pontos	Esgota todas as possibilidades, ou seja, acerta a questão apontando todas as possibilidades da questão.

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

[8] Destaca-se que no pré-teste e no pós-teste imediato havia 20 alunos participantes da pesquisa, e no pós-teste posterior havia 19 alunos. Isso porque um aluno não estava mais na mesma escola na época da realização do pós-teste posterior.

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

No Quadro 4 pode-se observar que a formação das duplas, em função do tipo de intervenção que os alunos participaram, foi feita por meio do número de pontos alcançados pelos alunos no pré-teste. Assim, foi estabelecido o critério de que em cada grupo haveria duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido dois pontos ou menos no pré-teste; duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido entre três pontos e sete pontos no pré-teste; e duplas que fossem constituídas por alunos que tivessem obtido oito pontos ou mais no pré-teste. Essa distribuição ocorreu com o objetivo de que houvesse diferentes níveis de compreensão inicial em cada grupo e que a média de acertos de cada grupo fosse semelhante.

Quadro 4: Distribuição dos alunos em duplas por grupo, de acordo com a pontuação obtida no pré-teste

Pontuação no pré-teste	G1	G2
De 0 a 2 pontos	A1 e A12; A13 e A19	A2 e A11; A6 e A7
De 3 e 7 pontos	A5 e A8; A16 e A17	A14 e A20; A15 e A18
De 8 pontos em diante	A4 e A9	A3 e A10

G1: Grupo 1 – Experimental (*Software* Árbol); G2: Grupo 2 – Controle (Estruturas Multiplicativas) A: Aluno
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Não havia objetivo de examinar a interação dos alunos nos diferentes níveis de pontuação inicial, mas acreditava-se no potencial dessa forma de organização. Além disso, desejava-se reproduzir, de certo modo, a realidade da sala de aula, na qual os alunos possuem diferentes níveis de compreensão antes da intervenção em determinados tópicos. Também se desejava a distribuição nos grupos de modo que todos partissem de uma média de acertos similar, não havendo nenhum grupo com média inicial mais forte, como pode ser observado na Tabela 1.

Tabela 1: Média de desempenho por grupo no pré-teste

Grupos	Médias de Desempenho no pré-teste
Grupo 1 (Experimental - *Software* Árbol)	4,6
Grupo 2 (Controle - Estruturas Multiplicativas)	4,7

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Sabendo-se que o total de pontos possíveis de ser alcançado por um aluno era de 32 pontos, uma vez que o teste tinha oito questões e que, em cada questão, o aluno poderia obter no máximo quatro pontos, nota-se, na Tabela 2, que os alunos, em geral, não obtiveram bons resultados na resolução do teste inicial com problemas combinatórios, uma vez que a maior parte dos alunos (16 alunos) fez apenas de 0 a 7 pontos, no teste. Além disso, nenhum aluno conseguiu fazer mais da metade dos pontos (16 pontos).

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Tabela 2: Número de alunos por pontuação no pré-teste em cada grupo

Grupos	Pontuação no pré-teste										T.
	0	2	3	4	5	7	8	9	12	13	
G1	1	3	1	2	**0**	1	**0**	1	**0**	1	10
G2	2	2	**0**	1	1	2	1	**0**	1	**0**	10
T.	3	5	1	3	1	3	1	1	1	1	20

G1: Grupo 1 – Experimental (*Software* Árbol); G2: Grupo 2 – Controle (Estruturas Multiplicativas); T.: Total.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Observou-se, assim, um fraco conhecimento inicial em Combinatória. Apesar desse baixo desempenho inicial, destaca-se que a explicitação das opções de escolha pode ter possibilitado a resolução de alguns problemas por alguns poucos alunos, uma vez que Correa e Oliveira (2011) apontam que, principalmente nos problemas de *combinação* e *arranjo* essa explicitação implica em importantes diferenças quando comparado com os enunciados tradicionais. Enfatiza-se que, essa explicitação de opções – listando os elementos a serem escolhidos – é diferente da explicitação de exemplos de possibilidades, trabalhada por Silva e Spinillo (2011), que também se mostrou um fator facilitador da resolução de problemas combinatórios.

5.1.2 Acertos no pré-teste em problemas combinatórios por tipo de problema

Estudos anteriores como os de Pessoa e Borba (2009a) e Correa e Oliveira (2011) ressaltaram que os alunos dos anos iniciais investigados apresentaram melhor desempenho em questões de *produto cartesiano*, seguido de *combinação*, *arranjo* e *permutação.* Entretanto, em outro estudo, Pessoa e Borba (2010), apesar de concordarem que os problemas de *produto cartesiano* e *permutação* são, respectivamente, os mais fáceis e os mais difíceis, apresentam outra ordem de facilidade dos problemas de *combinação* e *arranjo*. Parece, assim, haver um consenso nos estudos anteriores em relação ao tipo de problema mais fácil e tipo mais difícil, mas não quanto aos problemas de dificuldade intermediária.

A seguir, na Tabela 3, são apresentados e discutidos os dados referentes aos acertos no pré-teste de presente estudo por tipo de problema. Nesta tabela também foram destacados os problemas que obtiveram média superior a um ponto, denotando assim, algum conhecimento prévio em determinadas situações combinatórias.

Nota-se o baixo desempenho inicial dos alunos em todos os tipos de problemas combinatórios. Esse baixo desempenho inicial em problemas combinatórios de alunos de anos iniciais do Ensino Fundamental está de acordo com achados de estudos anteriores, como os de Pessoa e Borba (2009a; 2009b; 2010) e Correa e Oliveira (2011). A média de acertos por grupo em cada tipo de problema poderia chegar, no máximo, a quatro pontos, entretanto, essa média de acertos em cada tipo de problema não passou dos 41,25% de acerto – 1,65 de média, no caso dos problemas de *arranjo*.

Na Tabela 3 também é possível notar que, diferentemente dos estudos

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

anteriores os alunos da presente pesquisa apresentaram maior facilidade em problemas cuja ordem dos elementos no subconjunto gera novas possibilidades (*Arranjo* – 1,65; e *Permutação* – 1,2). Assim, com base nos estudos supracitados, esperava-se que a pontuação nos problemas de *produto cartesiano* fossem superiores à pontuação dos problemas de *permutação,* uma vez que esse resultado já foi apontado por esses estudos. Porém, os alunos do presente estudo obtiveram melhor desempenho em problemas de *arranjo*, seguidos pelos problemas de *permutação*, *combinação* e *produto cartesiano.*

Tabela 3: Média de acertos no pré-teste por grupo e tipo de problema (pontuação máxima em cada tipo de problema: 4,0)

Grupos	PC1	PC2	C1	C2	A1	A2	P1	P2
G1	0,40	0,20	0,30	0,90	0,60	**1,20**	0,30	0,70
G2	0,50	0,30	0,50	0,50	0,40	**1,10**	0,50	0,90
Total	0,7		1,1		1,65		1,2	

G1: Grupo 1 – Experimental (*Software* Árbol); G2: Grupo 2 – Controle (Estruturas Multiplicativas);
PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2;
A1: *Arranjo 1*; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Apesar dessas diferenças aparentes, por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi possível observar que, no pré-teste, a diferença entre os desempenhos nos quatro tipos de problemas não foi significativa[9] (PCxC: t(19) = - 1,094; p = 0,288; PCxP:t(19) = - 1,291; p = 0,212; CxA:t 19) = - 1,868; p = 0,077; CxP:t(19) = - 0,317; p = 0,755; AxP:t(19) = 1,756; p = 0,095), com exceção para a diferença entre *arranjo* e *produto cartesiano* (PCxA:t (19) = - 2,454; p = 0,024), revelando uma maior facilidade inicial nos problemas de arranjo.

5.2 Pós-teste imediato: os resultados da intervenção

5.2.1 Acertos em problemas combinatórios no pós-teste imediato

No pós-teste aplicado poucos dias após a intervenção os critérios de pontuação permaneceram os mesmos. A pontuação máxima era 32 pontos e pode-se notar, observando a Tabela 4, o avanço dos alunos do grupo experimental, quando comparado aos resultados do pré-teste (Tabela 2), uma vez que no pré-teste nenhum aluno fez mais da metade dos pontos (acima de 16 pontos) e no pós-teste imediato oito três alunos do grupo que usou o *software* somaram 20 e 22 pontos. Além disso, também é possível notar que os alunos que não participaram de intervenção por meio de resolução de problemas combinatórios (G2) não avançaram em seus conhecimentos, uma vez que nesse grupo a pontuação máxima obtida foi de 10 pontos no pós-teste imediato, quando havia sido 12 pontos no pré-teste.

Na Tabela 5, observa-se a média de acertos por grupos, antes e depois do processo de intervenção. Percebe-se o avanço que o grupo com intervenção em Combinatória *com software* (G1) apresentou, uma vez que o

[9] Nesta pesquisa foi considerado índice de significância p<,05

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

aumento na pontuação média é evidente. Quanto ao Grupo 1, que trabalhou com o *software Árbol*, observou-se que os alunos, em sua maioria, avançaram em seus conhecimentos em problemas combinatórios. Destaca-se que no pós-teste apenas três alunos deste grupo obtiveram pontuação menor ou igual a sete pontos e que três alunos obtiveram mais que 20 pontos. Assim, a experiência com o *software* possibilitou grandes avanços no desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Tabela 4: Número de alunos por pontuação no pós-teste imediato em cada grupo

Grupos	Desempenho Total Pós-teste imediato											T.
	0	3	4	5	6	7	8	10	12	20	22	
G1	0	0	1	0	1	1	1	**2**	**1**	**1**	**2**	10
G2	3	2	1	1	0	0	2	1	**0**	**0**	**0**	10
T.	3	2	2	1	1	1	3	3	1	1	2	20

G1: Grupo 1 – Experimental (*Software* Árbol); G2: Grupo 2 – Controle (Estruturas Multiplicativas); T.: Total.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Tabela 5: Média de desempenho por grupo no pré-teste e no pós-teste imediato

Grupos	Pré-teste	Pós-teste imediato
Grupo 1 (Experimental – Árbol)	4,6	12,1
Grupo 2 (Controle – Estruturas Multiplicativas)	4,7	4,1

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Ferraz, Borba e Azevedo (2010) destacaram em sua pesquisa que o *software* também pode dificultar, em certa extensão, a compreensão das situações por não propiciar a visualização de todas as possibilidades em algumas situações com números maiores de possibilidades. Em contrapartida a isso, também se destaca a pesquisa de Azevedo, Costa e Borba (2011), que enfatiza o grande avanço dos alunos que aprenderam Combinatória por meio deste mesmo *software.* O avanço pode, portanto, estar relacionado à necessidade de selecionar os casos válidos, mesmo que, inicialmente, não seja necessária a reflexão sobre todas as relações de cada tipo de significado, já que o próprio *software* gera as árvores, e a limitação da não visualização de todas as possibilidades não parece ter um efeito negativo forte demais.

O Grupo 2, composto pelos alunos que fizeram parte do grupo controle assistido – com aulas de estruturas multiplicativas – diminuiu um pouco a sua média de acertos em comparação com o pré-teste, como ainda pode ser visto na Tabela 5. Isto pode estar relacionado à natureza das situações que foram diferentes entre as do pré-teste e pós-teste e as trabalhadas na intervenção – que não eram de natureza combinatória. Assim, os alunos podem ter tentado aplicar procedimentos discutidos na intervenção e, dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, não parece ter auxiliado o desenvolvimento do raciocínio combinatório dos alunos que fizeram parte do G2 (Grupo Controle).

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi possível destacar que o grupo com intervenção em Combinatória com *software* apresentou diferenças significativas de desempenhos entre pré-teste e pós-teste imediato (t (9) = -3,822; p = 0,004). Isso não aconteceu na comparação do pré e pós-teste do Grupo 2 (t (9) = 0,688; p = 0,509). Com isso, é possível destacar que aprender a construir árvores de possibilidades em ambiente informático (uso do *software*) tem um efeito positivo na resolução de problemas combinatórios.

5.2.2 Acertos no pós-teste imediato em problemas combinatórios por tipo de problema

Como já dito anteriormente, os alunos dos anos iniciais, geralmente, apresentam maior facilidade na resolução de problemas de *produto cartesiano*, seguido de problemas de *combinação*, *arranjo* e *permutação (*PESSOA e BORBA, 2009a; CORREA e OLIVEIRA, 2011). Entretanto, na ocasião do pré-teste, os alunos do presente estudo não apresentaram facilidade de resolução nessa ordem, ou seja, os alunos apresentaram facilidade na seguinte ordem: *arranjo*, *permutação* e *combinação*, apesar de a diferença da média de pontos entre eles não ser significativa, como já apresentado na seção 5.1.2. Sabendo que a média máxima de pontuação por tipo de problema era de quatro pontos, nota-se que, após as diferentes intervenções com cada grupo, os alunos passaram a ter maior facilidade em questões de *produto cartesiano* (3,15), seguido de *arranjo* (2,80), *combinação* (1,90) e *permutação* (0,25), como pode ser visto na Tabela 6.

Nota-se, nesta tabela, o avanço em problemas combinatórios, com apenas uma sessão de intervenção, no desempenho dos alunos que usaram o *software*, quando comparados com a média de acertos no pré-teste por grupo e tipo de problema (Ver Tabela 3). A média de acertos por grupo em cada tipo de problema poderia chegar, no máximo, a quatro pontos, e, percebe-se que a média de desempenho, por vezes, superou os 50% de acerto, chegando a 65% de acerto no segundo problema de *produto cartesiano* do Grupo 1, quando, na ocasião do pré-teste não passou dos 35% de acerto – 1,20 de média (no caso da média do G1 no segundo problema de *arranjo*).

Tabela 6: Média de acertos no pós-teste imediato por grupo e tipo de problema. (Pontuação máxima em cada tipo de problema: 4,0)

Grupos	PC1	PC2	C1	C2	A1	A2	P1	P2
G1	1,90	**2,60**	1,80	1,40	**2,20**	1,70	,50	0,0
G2	1,00	0,80	,60	,00	1,20	,50	,00	0,0
Total	3,15		1,90		2,80		0,25	

G1: Grupo 1 – Experimental (*Software* Árbol); G2: Grupo 2 – Controle (Estruturas Multiplicativas); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo1*; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Ainda é possível notar, assim como no estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011), que após a intervenção os alunos passaram a ter maior facilidade em problemas de *produto cartesiano*, seguido de *arranjo* e *combinação* e maior

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

dificuldade em problemas de *permutação.*

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foram observadas diferenças significativas na comparação dos três primeiros tipos de problemas (*produto cartesiano*, *arranjo* e *combinação*) com a *permutação* (PC x P: t (19) = 3,960; p = 0,001; C x P: t (19) = 2,587; p = 0,018; A x P: t (19) = 4,636; p < 0,001), o que salienta a dificuldade dos alunos nesse tipo de problema (*permutação*), sejam eles participantes da intervenção em situações combinatórias, ou não.

Ainda utilizando a prova paramétrica *t-teste de amostras em pares* foi observado que houve também diferenças significativas quando comparados os problemas de *produto cartesiano* com *combinação* (PC X C: t (19) = 2,329; p = 0,018), entretanto, não houve diferenças significativas na comparação de *produto cartesiano* com *arranjo* (PC X A: t (19) = 0,464; p = 0,648). Foi possível destacar ainda, que não houve diferença significativa entre as médias de desempenho de *arranjo* e *combinação* (t (19) = - 1,552; p = 0,137). Isto pode ser reflexo do fato que alguns alunos apresentaram dificuldades em diferenciar *arranjos* e *combinações*, mesmo após a intervenção. Assim, houve alunos que responderam *arranjos* adotando o invariante de ordem das combinações, ou seja, considerando que a ordem dos elementos no subconjunto não gera novas possibilidades, assim como já foi apontado no estudo de Borba, Pessoa e Rocha (2012).

5.3 Pós-teste posterior: a retenção da aprendizagem

5.3.1 Acertos em problemas combinatórios no pós-teste posterior

Para observar se o aprendizado, evidenciado no primeiro pós-teste, era meramente imediato e temporário, ou se havia sido retido por mais tempo, realizou-se um pós-teste posterior entre 9 e 10 semanas após aplicação do pós-teste imediato. Os resultados verificados no pós-teste posterior podem ser observados na Tabela 7 que indica o desempenho de todos os participantes dos dois grupos.

No pós-teste posterior os alunos também poderiam somar 32 pontos no teste e, assim como no pós-teste imediato, foi possível constatar que os alunos que participaram da intervenção em Combinatória com o *software Árbol* (G1) avançaram em seus conhecimentos combinatórios. Destaca-se que uma aluna conseguiu somar 30 pontos, dos 32 possíveis.

Observando ainda a Tabela 7 percebe-se que, assim como no pós-teste imediato, os alunos do grupo controle (G2) não avançaram em seus conhecimentos combinatórios. Isso enfatiza que as aprendizagens retidas são, provavelmente, consequência das intervenções realizadas neste estudo, pois, se fossem consequência apenas do desenvolvimento cognitivo, ou de outros aprendizados escolares, os alunos do Grupo 2 também deveriam ter avançado em seus desempenhos.

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Tabela 7: Número de alunos por pontuação no pós-teste posterior em cada grupo

Grupos	Desempenho Total Pós-teste posterior												T.
	0	2	3	4	5	6	8	11	18	20	27	30	
G1	1	0	0	2	0	0	2	0	**1**	**1**	**1**	**1**	9
G3	2	1	1	2	2	1	0	1	**0**	**0**	**0**	**0**	10
T.	3	1	1	4	2	1	2	1	1	1	1	1	20

G1: Grupo 1 – Experimental (*Software* Árbol); G2: Grupo 2 – Controle (Estruturas Multiplicativas); T.: Total.
Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Na Tabela 8 observa-se o desempenho médio por grupo nas distintas etapas do estudo.

Tabela 8: Comparação da média de desempenho por grupo no pré-teste, pós-teste imediato e pós-teste posterior

Grupos	Pré-teste	Pós-teste Imediato	Pós-teste Posterior
Grupo 1 (Experimental – Árbol)	4,6	12,1	13,2
Grupo 2 (Controle – Estruturas Multiplicativas)	4,7	4,1	4,0

Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

É possível perceber que os alunos do grupo com intervenção específica em Combinatória (G1) com uso de *software* avançaram em seus conhecimentos sobre este conteúdo. Além disso, percebe-se que houve um aumento nas médias de acerto também na comparação com o pós-teste imediato. Vale salientar que não houve entre o pós-teste imediato e o pós-teste posterior intervenções em Combinatória – nem pela pesquisadora nem pela escola – que justificassem esse aumento na média de acertos, sendo, portanto, uma evidência de que o conteúdo trabalhado na intervenção do presente estudo foi, de fato, aprendido.

O Grupo 2, composto pelos alunos que fizeram parte do grupo controle – com aulas de estruturas multiplicativas – manteve, nos pós-testes, a sua média de acertos em comparação com o pré-teste, como ainda pode ser visto na Tabela 8. Dessa forma, observa-se que trabalhar problemas multiplicativos, mas não combinatórios, parece não ter auxiliado o desenvolvimento do raciocínio combinatório.

Por meio da prova paramétrica *t-teste de amostras em pares,* foi possível destacar que o grupo com intervenção em Combinatória com *software* apresentou diferenças significativas de desempenhos entre o pré-teste e o pós-teste posterior, avançando substancialmente em seu conhecimento combinatório. O Grupo 1 (*software*), quando comparado o pré-teste com o pós-teste posterior obteve diferença significativa entre as respectivas médias ($t\ (8) = -\ 2{,}920$; $p = 0{,}019$), mas não houve diferenças significativas na comparação do pós-teste imediato com o pós-teste posterior nesse grupo ($t\ (8) = -\ 0{,}472$; $p = 0{,}649$). O fato de não ter havido diferença significativa nesse grupo entre os desempenhos no pós-teste imediato e pós-teste posterior atesta que o grupo manteve estável os seus conhecimentos desenvolvidos durante a intervenção.

Com o intuito de comprovar a influência da intervenção nos resultados do grupo experimental foi observado, ainda pela prova paramétrica *t-teste de amostras em pares,* que não houve diferenças significativas na comparação do pré-teste com o pós-

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

teste posterior do Grupo 2 (controle – estruturas multiplicativas), (t (9) = 0,751; p = 0,472) nem do pós-teste imediato com o pós-teste posterior (t (9) = 0,0750; p = 0,946);

Assim, percebe-se que, os alunos participantes da intervenção em Combinatória com uso do *software* (G1) avançaram consideravelmente seus rendimentos em problemas dessa natureza, na comparação entre os seus próprios desempenhos antes e após o processo de intervenção, mas não houve avanços no grupo controle (G2).

Estes dados ratificam que, a aprendizagem específica em Combinatória é possível desde os anos iniciais do Ensino Fundamental e intervenções parecem ser necessárias para desenvolver o raciocínio combinatório desses alunos, uma vez que os alunos do grupo controle não apresentaram melhores desempenhos na ocasião dos pós-testes. Acredita-se, assim, que o avanço dos alunos se deve, principalmente, às intervenções realizadas com o uso do *software*.

A intervenção buscou, portanto, possibilitar aos alunos a construção de compreensões articuladas, como sugerido por Vergnaud (1986), incentivando o uso de uma eficiente representação e levando em consideração as relações combinatórias presentes nas diferentes situações. Sabe-se, entretanto, que outros fatores podem ter influenciado na melhora de desempenho dos participantes, mas, acredita-se que, esses fatores externos não são suficientes para o grande avanço ocorrido no Grupo 1, uma vez que o Grupo 2, que não vivenciou a intervenção em Combinatória com *software* não avançou em seus desempenhos.

5.3.2 Acertos no pós-teste imediato em problemas combinatórios por tipo de problema

No pós-teste posterior, após o intervalo de 9 a 10 semanas entre ambos os pós-testes, os alunos passaram a ter maior facilidade em questões de *produto cartesiano*, seguido de *combinação, arranjo* e *permutação*, como pode ser visto na Tabela 9, diferentemente do pós-teste imediato, quando havia maior facilidade nas questões de *produto cartesiano* seguidas de *arranjo, combinação* e, por fim, *permutação*. Essa inversão na ordem de facilidade entre os problemas de *arranjo* e *combinação* pode ser mais um destaque para que se afirme a ocasionalidade dessa ordem. Por outro lado, tem-se a confirmação da maior facilidade nos problemas de *produto cartesiano* e a maior dificuldade nos problemas de *permutação*.

Entretanto, salienta-se que no pós-teste posterior, por meio da prova paramétrica t-teste de amostras em pares, não foram identificadas diferenças significativas entre os tipos de problemas (PC X C: t (18) = 1,455; p = 0,163; PC X A: t (18) = 1,141; p = 0,269; PC x P: t (18) = 0,645; p = 0,527; C X A: t (18) = 0,534; p = 0,600; C x P: t (18) = 0,233; p = 0,818; A x P: t (18) = - 0,086; p = 0,932).

Destaca-se, ainda observando a Tabela 9, que o grupo com intervenção em Combinatória com o *software* (Grupo 1) teve médias de desempenho maior que a média do grupo sem intervenção em Combinatória (Grupo 2) em todos os tipos de problemas, uma vez que o Grupo 2 não chegou a 1,00 ponto de média de acertos em nenhum dos problemas.

Tabela 9: Média de desempenho por tipo de problema no pós-teste posterior

Grupos	PC1	PC2	C1	C2	A1	A2	P1	P2
G1	**2,22**	**2,00**	**2,00**	1,89	1,78	1,22	1,22	0,89
G2	0,60	0,20	0,50	0,00	0,20	0,70	0,90	0,90
Total	2,42		2,1		1,9		1,94	

G1: Grupo 1 – Experimental (Diagramas de Árbol); G2: Grupo 2 – Controle (Estruturas Multiplicativas); PC1: *Produto cartesiano* 1; PC2: *Produto cartesiano* 2; C1: *Combinação* 1; C2: *Combinação* 2; A1: *Arranjo1*; A2: *Arranjo* 2; P1: *Permutação* 1; P2: *Permutação* 2. Fonte: AZEVEDO, Juliana (2013)

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

6. Considerações finais

Diante do que foi apresentado e analisado, pode-se concluir que os alunos da presente pesquisa, participantes do grupo de intervenção em Combinatória, com uso do software *Diagramas de Árbol*, avançaram em seus raciocínios combinatórios. O grupo experimental demonstrou desempenhos significativamente melhores nos pós-testes imediato e posterior, comparado ao teste respondido antes da intervenção. Isso revela que o trabalho com *árvores de possibilidades* em *ambiente virtual* pode resultar em eficiente estratégia de ensino com alunos dos anos iniciais do Ensino Fundamental.

Nota-se, ainda, que estudar problemas multiplicativos que não envolvem o raciocínio combinatório não é suficiente para desenvolvê-lo, uma vez que o Grupo 2, que não resolveu problemas combinatórios, não obteve avanços ao comparar seus resultados do pré-teste com os resultados dos pós-testes.

Quanto aos significados, foi observado, que nos pós-testes imediato e posterior os alunos tiveram mais facilidade para responder os problemas de *produto cartesiano*. Quanto à maior dificuldade, destacam-se os problemas de *permutação,* uma vez que os alunos continuaram apresentando baixas médias de desempenho nesse significado, principalmente no pós-teste imediato.

Nos estudos de sondagem realizados por Pessoa e Borba (2009a) e Correa e Oliveira (2011) as questões de *permutação* foram as que os alunos apresentaram maior dificuldade na resolução. Ressalta-se que, no presente estudo, no momento do pré-teste (sondagem) os alunos apresentavam dificuldades em todos os tipos de problemas, entretanto, a maior dificuldade não foi com os problemas de *permutação*. Em contrapartida, após a intervenção esse tipo de problema passou a ser de mais difícil resolução para os alunos. Este resultado está em conformidade com o estudo de Azevedo, Costa e Borba (2011), em que após a intervenção realizada os alunos ainda apresentavam dificuldade neste tipo de problema. No estudo as autoras destacam que "[...] essa dificuldade pode ser consequência da grande quantidade de ramos apresentada pelo *Software Diagramas de Árbol* para a solução da questão, o que dificulta a visualização do total de possibilidades." (AZEVEDO; COSTA; BORBA, 2011, p. 9).

Acredita-se, entretanto, com o presente estudo, que a dificuldade quanto à permutação esteja relacionada, principalmente, à quantidade de etapas de escolhas a serem realizadas para a resolução deste tipo de problema, ou seja, os demais significados apresentavam apenas duas etapas de escolha, por exemplo, primeiro e segundo colocados no torneio, ou primeiro o tipo de comida e depois o tipo de bebida; enquanto que os problemas de permutação apresentavam três e quatro etapas de escolha, ou seja, deveria ser escolhido, por exemplo, a primeira, depois a segunda, e por fim, a terceira pessoa da fila do banco. Essa hipótese está atualmente sendo avaliada por Pontes e Borba (2012).

Com o presente estudo é possível concluir que o trabalho com *árvores de possibilidades* construídas por *software* é um excelente caminho para o aprendizado da Combinatória, uma vez que, utilizando essa representação os alunos foram capazes de desenvolver resoluções eficientes de situações combinatórias. Acredita-se, ainda, em conformidade com Vergnaud (1986), que trabalhar múltiplas representações permite aos alunos uma visão ampla do conhecimento matemático, desde que se reflita sobre as similaridades entre as variadas formas de representar o conceito estudado.

Dessa forma, concorda-se com Fischbein (1975) e Fischbein, Pampu e Minzat (1970) que, apenas o desenvolvimento do pensamento lógico-matemático não será suficiente para o aprendizado da Combinatória, sendo necessário, portanto, uma instrução específica, que pode ser com o uso de um recurso computacional – o *software*

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

educacional – como no caso deste estudo. Recomenda-se, assim, o uso da *árvore de possibilidades* e o uso de outras representações simbólicas, desde os primeiros anos de escolarização, uma vez que, trabalhar com essa diversidade pode caracterizar num conhecimento mais amplo sobre problemas combinatórios.

Deseja-se, assim, com essa pesquisa, contribuir para a reflexão sobre melhores possibilidades de ensino da Combinatória nas salas de aula dos anos iniciais do Ensino Fundamental ao apontar o uso de *árvores de possibilidades*, em particular construídas no computador, como recurso que permite que os alunos observem diferentes relações e propriedades de distintas situações combinatórias. Antes do ensino formal da Combinatória os alunos evidenciam noções intuitivas, mas o trabalho em sala de aula pode aproveitar esse conhecimento inicial e possibilitar o desenvolvimento do raciocínio combinatório, trabalhando-se uma variedade de situações combinatórias por meio de estratégias eficientes – como a construção de *árvores de possibilidades* – bem como o uso de um *software educacional* – o *Diagramas de Árbol.*

Referências

AGUIRRE, C. **Diagrama de Árbol.** Multimidea. 2005.

AZEVEDO, Juliana. Alunos de anos iniciais construindo árvores de possibilidades: É melhor no papel ou no computador? Dissertação (Mestrado). Recife, Centro de Educação,Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (PPGEDUMATEC - UFPE), Recife, PE, 2013.

AZEVEDO, Juliana.; COSTA, Débora.; BORBA, Rute. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais** da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil. 2011.

BORBA, Rute. O Raciocínio Combinatório na Educação Básica. In: **Anais**... X Encontro Nacional de Educação Matemática – ENEM. Bahia, 2010.

BORBA, Rute; PESSOA, Cristiane; ROCHA, Cristiane. How Primary School Students and Teachers Reason About Combinatorial Problems. **Proceedings…** 12th International Congress on Mathematical Education. COEX, Seoul, Korea. Jul 2012.

BORBA, Marcelo; PENTEADO, Miriam. **Informática e Educação Matemática**. 4 ed. Belo Horizonte: Autêntica Editora. Coleção Tendências em Educação Matemática. 2010.

BRASIL. **Parâmetros Curriculares Nacionais. Matemática**. 1ª a 4ª série. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

CORREA, Jane; OLIVEIRA, Gisele. A escrita do problema e sua resolução: o entendimento intuitivo acerca da combinatória. **Educar em Revista**, Editora UFPR: Curitiba, Brasil, n. Especial 1/2011, p. 77-91, 2011.

FERRAZ, Martha; BORBA, Rute; AZEVEDO, Juliana. Usando o software Árbol na construção de árvores de possibilidades para a resolução de problemas combinatórios. **Anais...** X Encontro Nacional de Educação Matemática. Salvador, 2010.

FISCHBEIN, Efraim. **The Intuitive Sources of Probabilistic Thinking in Children**. Reidel: Dordrecht, 1975.

FISCHBEIN, Efraim; PAMPU, Ileana & MINZAT, Ion. Effects of age and instruction on combinatory ability in children. **The British Journal of Educational Psychology,** n. 40, 1970.

GOMES, Alex Sandro; CASTRO FILHO, José Aires; GITIRANA, Verônica;

SPINILLO, Alina; ALVES, Mirella; MELO, Milena ; XIMENES, Julie. Avaliação de Software Educativo para o Ensino da Matemática. **Anais**... 22º. Congresso da Sociedade Brasileira de Computação, 2002, Florianópolis.

INHELDER, Bárbara; PIAGET, Jean. **Da lógica da criança à lógica do adolescente.** São Paulo: Livraria Pioneira Editora. 1976.

Revista Eletrônica de Educação, v. 7, n. 2, 2013, p. 39-62. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

LEITE, Maici; PESSOA, Cristiane; FERRAZ, Martha; BORBA, Rute. Softwares Educativos e Objetos de Aprendizagem: um olhar sobre a análise combinatória. **Anais...** X Encontro Gaúcho de Educação Matemática – EGEM, Ijuí, 2009.

MAHER, Carolyn; YANKELEWITZ, Dina. Representations as tools for building arguments. In: MAHER, Carolyn; POWELL, Arthur; UPTEGROVE, Elizabeth (Editors). **Combinatorics and Reasoning**: Representing, Justifying and Building Isomorphisms**.** New York: Springer, 2010.

NUNES, T.; BRYANT, P. **Crianças fazendo matemática.** Porto Alegre: Editora Artes Médicas, 1997.

NUNES, Terezinha; CAMPOS, Tânia; MAGINA, Sandra.; BRYANT, Peter. **Educação Matemática 1**: Números e operações numéricas. São Paulo: Cortez, 2005.

PESSOA, C. **Quem dança com quem:** o desenvolvimento do Raciocínio Combinatório do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Médio. 2009. (Tese Doutorado) - Programa de Pós-graduação em Educação da UFPE. Recife: UFPE, 2009.
PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem Dança com Quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª a 4ª série. **Zetetiké** – Cempem – FE – Unicamp – v.17, n.31 – jan./jun. – 2009a.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. A compreensão do raciocínio combinatório por alunos do 2º ano do Ensino Fundamental ao 3º ano do Ensino Mério. **Anais...** IV SIPEM – Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática. Brasília, Out. 2009b.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. **O Desenvolvimento do raciocínio combinatório na escolarização básica.** Em Teia: Revista de Educação Matemática e Tecnológica Iberoamericana, v.1, n.1. 2010.

PONTES, Danielle; BORBA, Rute. A Influência das Etapas de Escolha e das Representações Simbólicas na Resolução de Problemas Combinatórios por Estudantes do 5º Ano do Ensino Fundamental. **Anais...** VXI Ebrapem – Encontro Brasileiro de Estudantes de Pós-graduação em Educação Matemática. Canoas, Rio Grande do Sul. 2012.

RIVED. Rede Interativa Virtual de Educação. SEED/MEC. **Objetos de**

Aprendizagem *Combinação*, *Permutação*, *Arranjo*. Disponível em: <http://RIVED.mec.gov.br/atividades/matematica/combinacao/combinacao.swf>. Acesso em: set. 2008.

SANDOVAL, Ivonne; TRIGUEIROS, María; LOZANO, Dolores. Uso de un interactivo para el aprendizaje de algunas ideas sobre combinatoria en primaria. **Anais...** 12 Comitê Interamericano de Educação Matemática, Querétaro, México, 2007.

SILVA, Juliana; SPINILLO, Alina. Como auxiliar crianças na resolução de problemas de raciocínio combinatório: a explicitação dos princípios invariantes. **Anais**... 13 Conferência Interamericana de Educação Matemática – CIAEM/IACME, Recife, Brasil.2011.

VALENTE, José Armando. **O uso inteligente do computador na educação.** 1997. Disponível em: <http://www.diaadiaeducacao.pr.gov.br/diaadia/diadia/arquivos/File/conteudo/artigos_teses/EDUCACAO_E_TECNOLOGIA/USOINTELIGENTE.PDF>. Acesso em: 16 fev. 2012.

VERGNAUD, Gérard. Psicologia do desenvolvimento cognitivo e didática das matemáticas. Um exemplo: as estruturas aditivas. **Análise Psicológica, 1**. 1986. p. 75-90.

Enviado em: 31/01/2013
Aceito em: 15/09/2013