Ensaio

Aspectos históricos e epistemológicos do conceito de função: um estudo sobre as ideias-base

Historical and epistemological aspects of the function concept: a basic ideas study

Aspectos históricos y epistemológicos del concepto de función: un estudio sobre las ideas básicas

Tamires Vieira Calado[1], Veridiana Rezende[2]

Universidade Estadual do Paraná (Unespar), Campo Mourão – PR, Brasil

Resumo
A investigação aqui apresentada teve início com o desenvolvimento da dissertação de mestrado da primeira autora, naquela ocasião buscou-se investigar conhecimentos de estudantes da Educação Básica acerca da generalização da função afim. Os estudos foram aprofundados, e neste ensaio são apresentados aspectos histórico e epistemológico acerca da construção do conceito de função, explicitando suas ideias-base, ou seja, aquelas consideradas essenciais para a compreensão do conceito de função: correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização. Para a elaboração do ensaio teórico foram considerados livros e textos científicos, artigos publicados em periódicos científicos, dissertações e teses. A investigação mostra que os primeiros registros envolvendo ideias de função foram desenvolvidos pelos babilônios há cerca de 2000 anos a. C. e contemplam as seguintes ideias-base de função: correspondência, dependência, variável e regularidade. No entanto, o processo de construção do conceito de função ocorreu de maneira lenta e as funções adquiriram uma formalização somente no século XVII, a partir da ideia de generalização das leis quantitativas em termos matemáticos, simbólicos e algébricos, o que fez com que a função assumisse um lugar de destaque dentro das ciências exatas. As ideias-base de função estiveram presentes e foram fundamentais no longo processo de desenvolvimento histórico e epistemológico desse conceito.

[1] Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual do Oeste do Paraná - Unioeste pelo Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática - PPGECEM. Membro do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa. E-mail: tamirescalado@hotmail.com. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4536-8509.
[2] Docente associada da Universidade Estadual do Paraná - Unespar; membro do corpo docente do Programa de Pós-graduação em Educação Matemática – PRPGEM da Unespar e do Programa de Pós-graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática – PPGECEM da Unioeste. Líder do Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática – GEPeDiMa. E-mail: rezendeveridiana@gmail.com. ORCID iD: https://orcid.org/0000-0002-4158-2196

Abstract
The investigation presented here began with the development of the first author's master's thesis. On that occasion, we sought to investigate the knowledge of Basic Education students about the generalization of the related function. The studies were in-depth, and this essay presents historical and epistemological aspects about the construction of the concept of function, explaining its basic ideas, that is, those considered essential for understanding the concept of function: correspondence, dependence, variable, regularity and generalization. To prepare the theoretical essay, books and scientific texts, articles published in scientific journals, dissertations and theses were considered. Research shows that the first records involving ideas of function were developed by the Babylonians around 2000 years ago. C. and include the following basic function ideas: correspondence, dependence, variable and regularity. However, the process of building the concept of function occurred slowly and functions only acquired formalization in the 17th century, based on the idea of generalizing quantitative laws in mathematical, symbolic and algebraic terms, which made the function assumed a prominent place within the exact sciences. The basic ideas of function were present and were fundamental in the long process of historical and epistemological development of this concept.

Resumen
La investigación que aquí se presenta comenzó con el desarrollo de la tesis de maestría del primer autor, en esa ocasión buscamos indagar en el conocimiento de los estudiantes de Educación Básica sobre la generalización de la función relacionada. Los estudios fueron profundos, y este ensayo presenta aspectos históricos y epistemológicos sobre la construcción del concepto de función, explicando sus ideas básicas, es decir, aquellas consideradas esenciales para comprender el concepto de función: correspondencia, dependencia, variable, regularidad y generalización. Para la elaboración del ensayo teórico se consideraron libros y textos científicos, artículos publicados en revistas científicas, disertaciones y tesis. Las investigaciones muestran que los primeros registros que involucran ideas de función fueron desarrollados por los babilonios hace unos 2000 años. C. e incluyen las siguientes ideas de funciones básicas: correspondencia, dependencia, variable y regularidad. Sin embargo, el proceso de construcción del concepto de función se dio lentamente y las funciones recién adquirieron formalización en el siglo XVII, a partir de la idea de generalizar leyes cuantitativas en términos matemáticos, simbólicos y algebraicos, lo que hizo que la función asumiera un lugar destacado dentro del Ciencias Exactas. Las ideas básicas de función estuvieron presentes y fueron fundamentales en el largo proceso de desarrollo histórico y epistemológico de este concepto.

Palavras-chave: Ensino da Matemática, Função, História, Ideias-Base.
Keywords: Teaching of Mathematics, Function, History, Basic Ideas.
Palabras clave: Enseñanza de Matemáticas, Función, Historia, Ideas Básicas.

1. Introdução

A história das Ciências revela a gênese do conceito de função a partir de problemas práticos, da necessidade de observar e estudar fenômenos naturais, buscando descobrir suas causas, modelar leis de variação e realizar previsões (CARVALHO, 2019; EVES, 2004; BOYER, 1996; CARAÇA, 1963).

Desde os povos da Antiguidade, é possível identificar ideias, em seus registros, que atualmente são associadas ao conceito de função. Como exemplo, citamos os *tabletes* de argila construídos pelos babilônios por volta de 2000 a. C., que continham tabelas de dependência entre quantidades variáveis

(EVES, 2004; AABOE, 2002). Tais escritas babilônicas nos revelam ideias de função, tais como correspondência, dependência, variável e regularidade envolvidas nas escritas matemáticas desses povos.

Apesar desses indicativos, a construção do conceito função ocorreu de maneira lenta na história, sendo necessários mais de 20 séculos de experiências, descobertas e disparidades para que este conceito fosse formalizado tal como atualmente é concebido pela comunidade de matemáticos, e abordado nos livros didáticos de matemática.

Nessa direção, Ciani, Nogueira e Berns (2019, p. 43) mencionam que "[...] compreender o longo processo de criação do conceito de função pela humanidade é fundamental ao professor para entender que a formação do conceito de função pelos alunos também é um processo complexo e demorado". Corroboramos com esses autores e, embasadas em Vergnaud (2009), assumimos que a compreensão do conceito de função pelos estudantes leva tempo e depende das diferentes situações vivenciadas durante o processo escolar.

De acordo com documentos que direcionam o ensino de Matemática no país, entre eles a Base Nacional Comum Curricular (BNCC) (BRASIL, 2018), noções de função são previstas para os Anos Iniciais, por meio das ideias de regularidade, descrição de padrões e propriedades de igualdade. Tais ideias necessitam ser aprofundadas no decorrer da escolarização, de modo que, nos Anos Finais do Ensino Fundamental, o aluno seja capaz de compreender diferentes significados das variáveis numéricas em uma expressão, estabelecer generalizações, regularidades, e indicar valores desconhecidos em uma sentença algébrica. Ainda, segundo esses documentos, é necessário que os alunos estabeleçam conexões entre variável e função, e entre incógnita e equação (BRASIL, 2018).

Segundo a BNCC (BRASIL, 2018), espera-se que no 9º ano o aluno estude o conceito de função, compreendendo-a como uma relação de dependência unívoca entre duas variáveis, resolva problemas e reconheça suas representações numérica, algébrica e gráfica. O conceito de função também deve ser retomado e aprofundado na 1ª série do Ensino Médio (BRASIL, 2018). Nos documentos que direcionam os currículos e ementas de cursos de Licenciatura em Matemática (BRASIL, 2001) constam diferentes disciplinas que contemplam o conceito de função, tais como cálculo diferencial e integral, fundamentos da Matemática, análise real, geometria analítica, entre outras.

Em outras palavras, os documentos que orientam os currículos brasileiros mostram que ideias do conceito de função permeiam todo o processo escolar, desde os Anos Iniciais até os cursos de Licenciatura em Matemática, estes últimos responsáveis pela formação inicial dos professores de Matemática do país. Porém, pesquisas (NUNES; SANTANA, 2017; PIRES, MERLINE; MAGINA, 2015; RAMOS; CURI; 2014) mostram que estudantes de diferentes níveis de ensino e até mesmo professores manifestam dificuldades acerca da compreensão das funções. Segundo Chaquiam (2021, p. 218), tais dificuldades sobrevêm da não compreensão da natureza das variáveis envolvidas, da dependência entre elas, das "[...] abordagens mecânicas e abstratas sem conexões entre os elementos gráficos e expressões algébricas".

Neste sentido, defendemos que algumas ideias são essenciais para a compreensão do conceito de função. Para tanto, baseamo-nos em alguns autores (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2002; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006; PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020), e juntamente com o Grupo de Estudos e Pesquisas em Didática da Matemática (GEPeDiMa) em que participamos, assumimos que as noções de correspondência, dependência, regularidade, variável e generalização são fundamentais para a compreensão desse conceito. Respaldadas em Pavan (2010) e Nogueira (2014), denominamos essas noções como "ideias-base de função". Desta forma, tais ideias são essenciais para a compreensão de uma função de qualquer tipo - polinomial, raiz, racional, exponencial, logarítmica, entre outras, e devem ser construídas pelos estudantes desde os Anos Iniciais, estendendo-se por todo o processo escolar.

Dentre as ideias fundamentais para a constituição do conceito de função, algumas pesquisas (ARDENGHI, 2008; NOGUEIRA, 2014; PINTO, 2014; REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020) vêm mostrando que a generalização ocasiona maior dificuldade para os alunos, impossibilitando a compreensão do conceito de função em sua essência. Por esta e outras justificativas, a pesquisa de mestrado da qual este artigo se originou foi desenvolvida com vistas a responder à seguinte questão: "quais teoremas em ação, relacionados à generalização, podem ser mobilizados por alunos do 9º ano do Ensino Fundamental a partir de situações envolvendo função afim*?".* Para respondê-la, elaboramos uma sequência didática, nos moldes da Engenharia Didática (ARTIGUE, 1996), que foi experimentada com estudantes do 9º ano do Ensino Fundamental.

A Engenharia Didática é caracterizada como metodologia de pesquisa e consiste em quatro fases: análises preliminares; concepções e análises *a priori* das situações a serem propostas aos estudantes; experimentação; análises *a posteriori* e validação (ARTIGUE, 1996). Dentre os diversos estudos a serem realizados nas análises preliminares consta aquele a respeito da gênese história e análise epistemológica do saber matemático em questão (ALMOULOUD, 2014; ARTIGUE, 1996).

A partir das análises preliminares realizadas para a elaboração da dissertação da qual o ensaio se originou, estabelecemos o seguinte objetivo: "apresentar um estudo histórico e epistemológico acerca da construção do conceito de função, explicitando suas ideias-base – correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização – no processo de construção do referido conceito".

A metodologia adotada para o estudo caracteriza-se como ensaio teórico, que se trata de um tipo de pesquisa bibliográfica, a qual se refere àquelas bibliografias que já circulam entre os pesquisadores, na forma de publicações científicas como artigos, livros, anais de eventos, entre outros (BARBOSA, 2018). “São materiais que já receberam alguma abordagem analítica ou problematizadora reconhecida como pertencente ao campo científico” (BARBOSA, 2018, p. 41).

Uma pesquisa bibliográfica pode ser classificada como ensaio teórico ou síntese de literatura. O ensaio teórico trata-se de uma exposição lógica, rigorosa, coerente e crítica de argumentação sobre um determinado tema (BARBOSA, 2018). Nesses casos, diferentemente do que ocorre em uma síntese de literatura, não há delimitação prévia de *corpus* da literatura, e o pesquisador mobiliza a bibliografia conforme a necessidade para construir sua argumentação.

Sendo assim, a investigação aqui apresentada configura-se como ensaio teórico, e para o seu desenvolvimento foram realizados estudos em livros e textos científicos, artigos publicados em periódicos científicos, dissertações e teses. Na sequência deste texto, discutimos cada uma das ideias-base do conceito de função e apresentamos uma situação na qual é possível identificar essas ideias. Em seguida, apresentamos a seção contendo o estudo histórico e epistemológico acerca do conceito de função, explicitando suas ideias-base. O texto é finalizado com as considerações finais e referências.

2. Ideias base do conceito de função

Fundamentadas em diferentes autores (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2002; CAMPITELI; CAMPITELI, 2006; PAVAN, 2010; NOGUEIRA, 2014), assumimos que a compreensão do conceito de função carrega, em sua essência, cinco ideias principais: correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização. A elas denominamos "ideias-base do conceito de função". Nesta seção apresentamos cada uma destas ideias, e ao fim, uma tarefa envolvendo o conceito de função afim, seguida de uma análise indicando a possibilidade de manifestação das ideias-base.

A ideia de correspondência é uma das primeiras formas de pensamento matemático a se manifestar desde a infância, por exemplo, na comparação da quantidade de objetos de duas coleções (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020). Em uma situação de contagem de objetos realizada por uma criança, cita-se a correspondência feita “[...] pelo apontamento do dedo (ou olhar) a cada um dos objetos a serem contados, ao mesmo tempo em que recita a sequência de palavras-número, um, dois, três, e assim sucessivamente, até esgotar os objetos da coleção” (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020, p. 7). Tal situação faz corresponder, a cada objeto da coleção, um número da sucessão natural (CARAÇA, 1963).

A ideia de dependência expressa a relação entre grandezas variáveis que irá caracterizar uma função. Segundo Tinoco (2011), em uma relação funcional, uma das grandezas (variável dependente) é univocamente determinada pela variação da outra (variável independente). Por meio desta noção matemática, é possível observar a dependência entre grandezas que ocorre em fenômenos da Física, da Biologia, da Química e de outras áreas, que são modelados por uma função (REZENDE; NOGUEIRA; CALADO, 2020).

Para Caraça (1963), a relação de dependência entre grandezas variáveis atribui à função um caráter dinâmico, tornando esse conceito um dos mais importantes de toda a Matemática.

A ideia de variável refere-se a qualquer elemento de um conjunto, e geralmente é representado por uma letra. Essa noção é uma das mais difíceis para os alunos, pois se trata de um número qualquer de determinado conjunto, mas não é especificamente nenhum dos números desse conjunto (CARAÇA, 1963; TINOCO, 2002).

A variável pode desempenhar papéis distintos, dependendo da situação. Queiroz (2008) menciona que, conforme a situação, as variáveis podem assumir o papel de incógnita (termo desconhecido), de parâmetro (números genéricos), ou ainda, como variáveis em uma relação funcional; para cada um destes casos, a simbolização, a manipulação e a interpretação da noção de variável são distintas.

Para a compreensão da ideia de variável em uma situação funcional, é necessário reconhecer situações em que ocorra a variação simultânea das variáveis e observar o aspecto de dependência entre elas (QUEIROZ, 2008). Essas situações podem envolver informações representadas em tabelas, gráficos, expressões analíticas, problemas verbais, entre outras.

A regularidade refere-se ao comportamento idêntico de determinadas situações, desde que as condições iniciais sejam mantidas (CARAÇA, 1963). Segundo Rezende, Nogueira e Calado (2020), a regularidade permite a previsão dos fenômenos a serem estudados. Nesse sentido, “[...] o reconhecimento de regularidades em situações reais, padrões geométricos, sequências numéricas é necessário para a construção do conceito de função” (CAMPITELI; CAMPITELI, 2006, p. 36).

De acordo com Nogueira (2014), geralmente, a ideia de regularidade é simples de ser entendida pelos alunos, e por isso o incentivo à descoberta da regularidade pode ser iniciado desde a Educação Infantil. Segundo a referida autora, trabalhando com desenhos, as crianças podem ser estimuladas a descobrir o padrão de repetição de uma sequência.

A partir do momento em que se estabelece uma regularidade, é possível descrever o padrão observado e, assim, estabelecer a "generalização" que, segundo Nogueira (2014), envolve abstração. Para Tinoco (2011), é preciso que o aluno consiga avaliar corretamente as "variáveis", a dependência (ou não) presente em determinado problema e, por fim, identificar a regularidade existente e a generalização, sendo este último um elemento decisivo para a construção do conceito de função.

A generalização envolve o registro de leis gerais, normalmente em linguagem algébrica ou gráfica, e é passo decisivo para a construção do conceito de função (NOGUEIRA, 2014). Para Rezende, Nogueira e Calado (2020), muitas vezes os alunos conseguem perceber, a partir da regularidade, que há uma "lei de formação" que descreve um comportamento ou fenômeno, mas é preciso, ainda, argumentar e justificar que essa lei faz sentido para além de casos particulares, ademais de estabelecer uma fórmula para esta lei de formação. Esse movimento só é possível a partir de uma abstração sobre os casos particulares experimentados.

Apresentamos, a seguir, uma tarefa envolvendo função afim extraída da pesquisa de Calado (2020), seguida de uma análise que indica a possibilidade de manifestação de cada uma das ideias-base.

Quadro 1 - Tarefa envolvendo o conceito de função

Ana vai à padaria para comprar pães todo sábado de manhã, seus pães preferidos custam $R\$\ 0{,}18$ cada um. a) Se Ana comprar 3 pães, quanto pagará pelos pães? b) E se comprar 7 pães, quanto terá gastado com os pães? c) Escreva a expressão algébrica que representa o valor que Ana pagará se comprar uma quantidade qualquer de pães.

Fonte: Calado (2020, p.70).

Em relação ao conceito de função, mesmo que implicitamente, essa tarefa permite, aos estudantes, mobilizar as cinco ideias-base envolvidas:

i. Correspondência: para cada quantidade comprada de pães corresponde a um único valor a ser pago;
ii. Dependência: o valor gasto com os pães é determinado por meio da dependência com a quantidade de pães comprados;
iii. Variável: a quantidade de pães comprados (variável independente) e o valor a ser pago (variável dependente);
iv. Regularidade*:* para determinar o valor gasto com diferentes quantidades de pães comprados, observa-se a manifestação de uma regularidade a partir do valor unitário do pão; e
v. Generalização*:* a partir da regularidade é possível generalizar a variável *valor a ser pago* para qualquer quantidade de pães comprados.

Desta forma, em situações envolvendo o conceito de função, como a tarefa descrita, mesmo que não seja mencionado o termo "função" explicitamente, é possível mobilizar as ideias-base essenciais para a compreensão desse conceito: correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização. É neste sentido que defendemos que situações envolvendo as ideias-base de função sejam proporcionadas aos estudantes desde os Anos Iniciais, para que, durante o processo escolar, tais ideias, e por consequência o conceito de função, sejam apropriados pelos estudantes.

Para tanto, inferimos que conhecer o processo histórico e epistemológico do conceito de função e a relação com suas ideias-base proporciona suporte para os professores compreenderem o longo período escolar que seus alunos levam para desenvolver esse conceito.

3. Aspectos históricos e epistemológicos do conceito de função

Apresentamos, nesta seção, um estudo histórico e epistemológico do conceito de função, no qual buscamos explicitar as ideias-base envolvidas no decorrer do processo de construção desse conceito.

Desde a Antiguidade, é possível notar ideias de função manifestadas nas escritas matemáticas dos babilônios. Por volta de 2000 a.C., esses povos já utilizavam tabelas de correspondência entre valores numéricos, que envolve a ideia de dependência entre variáveis, por exemplo: em uma tabela, em uma coluna, aparecem valores para n e, em outra coluna, os valores calculados para $n^2 + n^3$, no intervalo de números inteiros de 1 a 30 (EVES, 2004).

Em um de seus tabletes de argila com escritas cuneiforme[3], os babilônios registraram uma tábua de multiplicação por 9, que com as notações atuais representa uma sequência numérica e regular de múltiplos do número nove: 9, 18, 27, 36, ..., 180 (AABOE, 2002). Assim, a ideia de regularidade também estava presente na matemática dos babilônios. Este fato também é mencionado por Eves (2004), ao afirmar que, além da noção de dependência entre duas quantidades, a ideia de regularidade pode ser identificada nos

[3] A denominação *cuneiforme* para a escrita dos babilônios decorre das formas dos sinais. Marcas em formas de cunha eram feitas com um estilete sobre tabletes de barro moles, que depois eram cozidos em fornos ou ao calor do sol (BOYER, 1996).

registros dos povos babilônios por meio de tábuas de multiplicação, disponibilizadas em tabelas de argila (EVES, 2004).

Conforme Eves (2004, p. 63), “[...] os babilônios eram infatigáveis construtores de tábuas, calculistas extremamente hábeis e certamente mais fortes em álgebra do que em geometria”. Para Pires (2016, p. 4), “[...] nessas tábuas era possível encontrar a principal ideia envolvida no conceito de função: a relação funcional entre variáveis”. Carvalho (2019, p. 30) observa que as funções tabuladas:

> [...] atendiam as necessidades práticas de um período, e ainda que não fossem compreendidas como função de acordo com conceito formatado contemporaneamente, mantinham a essência do que podemos dizer que é a raiz epistemológica desse conceito, a ideia da relação de variabilidade entre quantidades.

Segundo Boyer (1996), naquele período não se utilizavam letras para representar quantidades desconhecidas, pois o alfabeto ainda não havia sido inventado, mas palavras como "comprimento", "largura", "área" e "volume" serviam bem nesse papel, e “[...] que tais palavras possam ter sido usadas num sentido abstrato é sugerido pelo fato de os babilônios não hesitarem em somar um ‘comprimento’ com uma ‘área’, ou uma ‘área’ com um ‘volume’” (BOYER, 1996, p. 21).

De acordo com Higueras (1993), não foram encontrados registros de que os babilônios expressavam seus resultados de forma a "generalizar", pois os achados contêm apenas o estudo de casos específicos, sem nenhuma formulação genérica. No entanto, Boyer (1996) aponta que, embora nenhuma formulação geral dessas tabelas tenha sido preservada, não significa necessariamente que não havia consciência da generalidade dessas regras ou princípios. Se não houvesse, de uma forma ou de outra, uma regra geral subjacente, seria muito difícil explicar a analogia entre os diferentes problemas do mesmo tipo.

Neste sentido, os matemáticos babilônios possuíam um instinto de funcionalidade, visto que uma função não é apenas uma fórmula, mas uma relação mais geral que associa elementos de dois conjuntos, e isso está presente nas numerosas tabelas de cálculos babilônicos (BOYER, 1996). Acrescentamos que as referidas tabelas manifestam as ideias de correspondência, dependência, variável e regularidade que defendemos como essenciais para a compreensão da ideia de função. Sendo assim, é possível identificar, mesmo de maneira implícita, que essas ideias estiveram presentes em registros de povos que viveram na Antiguidade.

Para Higueras (1993), podemos afirmar que esse instinto de funcionalidade dos matemáticos e astrônomos babilônicos manifestou-se em seu aprofundamento nos métodos quantitativos por meio de observações de difícil mensuração, uma vez que não se limitaram a uma tabulação de dados empíricos, mas em vez disso usaram interpolação e extrapolação em busca de regularidade. Em outras palavras, mesmo sem explicitar a utilização das ideias-base, os babilônicos recorriam a essas ideias para o desenvolvimento de suas matemáticas. Para a mesma autora, “[...] essa busca de regularidade em suas tabulações talvez seja sua característica mais importante, embora, de fato, haja uma distância muito grande entre o ‘instinto de funcionalidade’ e a noção de função” (HIGUERAS, 1993, p. 150).

Na Grécia, no período entre 600 e 500 a.C., os pitagóricos descobriram as leis simples que regem a harmonia musical, ou seja, eles notaram que o som produzido por uma corda distendida "depende" do seu comprimento. Dessa forma, podemos considerar que a escola pitagórica já conhecia a interdependência de grandezas físicas e apresentava indícios da noção de uma generalização para o som produzido por uma corda em "função" do seu comprimento. Para de Ribeiro e Cury (2015), o uso sistemático de tabela de cordas de um círculo e as tabelas trigonométricas são indícios de que os gregos trataram de problemas que tinham implícita a noção de função, mas a falta de simbolismo os impediu de desenvolver a ideia de funcionalidade.

Neste sentido, entendemos que ideias essenciais relacionadas ao conceito de função, como correspondência, dependência, variável e regularidade, eram cada vez mais utilizadas pelos estudiosos da antiguidade, mas a falta de uma sistematização e representação matemática formal envolvendo símbolos para a apresentação de sua generalização, por exemplo, dificultava formalizar o conceito de função.

Posteriormente, as funções tabuladas empiricamente tornaram-se a base matemática para todo o desenvolvimento subsequente da astronomia. De acordo com Pires (2016), em Alexandria, os astrônomos utilizaram teoremas da geometria para confeccionar tábuas de cordas que eram equivalentes às tábuas dos senos. Boyer (1996) menciona que a tábua de cordas mais antiga encontra-se no *Almagest,* do astrônomo Claudius Ptolomeu, na qual a posição do Sol, da Lua e dos planetas mudava de maneira contínua e periódica, e era determinada por meio de procedimentos que seguiam alguns padrões.

Higueras (1993) afirma que, no pensamento grego, havia uma ideia primitiva de função contida nas noções de mudança e relação entre magnitudes "variáveis". No entanto, os filósofos gregos consideravam a mudança e o movimento como algo externo à matemática. Atribuíam à Física objetos em movimento, e à Matemática, uma ciência estritamente teórica. Essa filosofia estática da Matemática foi a razão pela qual os matemáticos, por muito tempo, pensavam e falavam em termos de incógnitas e não em termos de variáveis. Isso os levou a proporções e equações, e não a funções (HIGUERAS, 1993).

Essa atitude em relação à matemática foi mantida na mente dos matemáticos por muito tempo. Eles consideravam as magnitudes físicas e as proporções entre elas como algo diferente das igualdades estritamente numéricas (HIGUERAS, 1993). “[...] essa concepção de ‘variabilidade’ como característica exclusiva das grandezas físicas pode ser considerada um claro obstáculo ao desenvolvimento da noção de função” (HIGUERAS, 1993, p.152).

No entanto, a escola pitagórica acreditava que "tudo é número". Dessa forma, para eles, um número poderia ser associado a qualquer magnitude. O número correspondia à aritmética e à teoria dos números; e a magnitude, à geometria. Porém, a escola pitagórica tentou relacionar os números e as magnitudes por meio das proporções, o que lhes permitiu resolver os problemas geométricos algebricamente. As proporções representam a razão numérica que pode ser estabelecida entre grandezas de mesma magnitude (HIGUERAS, 1993).

De acordo com Higueras (1993), essa prática de expressar todas as relações entre as coisas na forma de proporções também foi um obstáculo ao desenvolvimento da noção de função, pois quando trabalhavam com proporções, era muito difícil para eles distinguirem a relação entre quantidades diferentes, uma vez que sempre comparavam quantidades de mesma natureza. Essa forma de pensar impedia-lhes de encontrar, de forma significativa, dependências entre variáveis de diferentes magnitudes, o que lhes teria aproximado das relações funcionais.

Para os pitagóricos, havia uma magnitude muito pequena e indivisível, que era o elemento gerador de todas as outras magnitudes. No entanto, o problema da incomensurabilidade foi um adversário para eles, pois surgiram casos em que não foi possível encontrar uma medida comum para as quantidades. A partir desse momento, os números não foram mais considerados entidades contínuas, e as magnitudes não foram mais associadas a números, uma vez que se considerou um absurdo a razão entre duas magnitudes por meio de números inteiros. Assim, até o aparecimento dos irracionais, os números foram considerados discretos e tudo o que era contínuo deixou de ser numérico (HIGUERAS, 1993).

A incomensurabilidade também foi um obstáculo à noção de função, pois discretizava os números, e isso impediu o estabelecimento de relações numéricas gerais entre magnitudes. Nesse cenário, as proporções tornaram-se o melhor meio de comparar quantidades totalmente desprovidas de seu caráter numérico (HIGUERAS, 1993).

> [...] enquanto a noção de número contínuo não foi aceita, seria muito difícil construir a noção de função, uma vez que os números, assim considerados, apenas permitem construir uma ilustração discreta dos fenômenos da natureza, mascarando a continuidade existente na variabilidade das próprias funções (HIGUERAS, 1993, p.154).

Após o desaparecimento da sociedade milenar, o florescimento da ciência nos países de cultura árabe não proporcionou conhecimentos novos e significativos em relação à funcionalidade. No entanto, Higueras (1993) menciona que, nesse período, ocorreu a separação da álgebra e da trigonometria como ciências particulares da Matemática. Em ambas as ciências faltava apenas um passo para que adquirissem o aspecto analítico usual, que possuem atualmente, e a introdução de uma simbologia adequada.

Além de conhecer um fenômeno, começou a se desenvolver, por meio da Ciência, a possibilidade de prever fenômenos, ou seja, quanto melhor a previsão, maior o domínio que se tem sobre a Natureza. Conforme Caraça (1963, p. 108), “[...] a Ciência não tem, nem pode ter, como objetivo descrever a realidade tal como ela é. Aquilo a que ela aspira é a construir quadros racionais de interpretação e previsão”. De acordo com Ponte (1984), a evolução do conceito de função nessa fase inicial foi marcada por dois aspectos: a preocupação com a coerência e com a generalidade. A discussão, no entanto, não procedeu apenas em um nível abstrato, mas acompanhou os principais problemas matemáticos da época.

Caraça (1963) deixa clara a necessidade de considerar dois aspectos fundamentais da Realidade para que o homem compreenda o Mundo: a "interdependência e a fluência". A interdependência pode ser notada na relação que os fenômenos estabelecem uns com os outros, como um fenômeno pode interferir nos resultados de outros fenômenos. A "fluência" é considerada na permanente evolução a que todas as coisas se submetem a todo momento, transformando-se e fluindo. Essa fluência pode ser observada por qualquer um de nós.

Para Caraça (1963), o fato de as coisas serem interdependentes e fluentes dificulta a análise de apenas um determinado aspecto. Nesse sentido, é necessário que o observador faça um recorte desse objeto no universo, abstraindo os fatos de todos os outros objetos que estão relacionados. A isso é dado o nome de "isolado". No entanto, esse recorte precisa ser feito com certa cautela para que o isolado contenha todos os fatores, isto é, que a ação da interdependência e da influência no fenômeno esteja no objeto de estudo. Porém, o isolado está sempre em mudança e evolução. A essa evolução dá-se o nome de Fenômeno Natural.

Cabe, então, ao cientista, observar e descrever os fenômenos ordenando seus resultados, cujas previsões podem ser confirmadas por observação e experimentação. Em alguns desses fenômenos pode ser notada a regularidade, ou seja, comportamentos idênticos, desde que as condições iniciais sejam as mesmas. A existência da regularidade permite que sejam feitas previsões, ação essencial para o homem estabelecer seu domínio sobre a Natureza. Para Ciani, Nogueira e Berns (2019, p. 42), “[...] uma das tarefas mais importantes no trabalho de investigação da Realidade, é o de procurar, identificar, expressar, tratar e prever regularidades dos fenômenos naturais”.

Caraça (1963) afirma que a regularidade de evolução de um fenômeno é chamada de Lei Natural, podendo ser do tipo quantitativa ou qualitativa. A história da Ciência deixa claro, na medida em que se vai conhecendo melhor a Realidade, que a preferência para aplicar a lei tende a ser do tipo quantitativa, sem deixar de se preocupar com a qualitativa. Nesse sentido, para Ciani, Nogueira e Berns (2019), é natural esperar que surja a necessidade de criar instrumentos matemáticos adequados para o estudo de "leis quantitativas". O conceito de função surgiu ao buscar entender, explicar e, principalmente, prever fenômenos naturais, o que contribui para que as funções sejam um dos mais importantes conceitos da Matemática.

Nogueira (2014) menciona que o conceito de função surgiu com a busca incessante de cientistas e filósofos por explicar a realidade, mais especificamente, da necessidade de construir quadros explicativos para os fenômenos naturais, ou seja, fenômenos que relacionam "causa-efeito", ou, em linguagem matemática, a dependência entre variáveis.

A partir do Renascimento (1300-1600), a Ciência tomou o rumo da observação e da experimentação, e a matemática tendeu a ocupar um lugar cada vez mais importante nas ciências naturais (PIRES, 2016). De acordo com Higueras (1993), fenômenos sujeitos a mudanças, como calor, luz, densidade, distância e velocidade são estudados considerando não apenas o porquê as mudanças acontecem, mas fundamentalmente como elas acontecem.

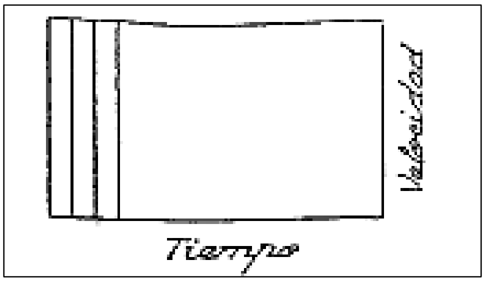
Novos métodos da Física foram desenvolvidos em conexão com a ideia de relacionamento funcional. Dois métodos principais foram desenvolvidos, o primeiro deles foi a "álgebra de palavras", usada em mecânica por Thomas Bradwardine (1290-1349), na qual a generalização era alcançada usando letras do alfabeto em vez de números para substituir quantidades variáveis, enquanto as operações de adição, divisão, multiplicação etc., realizadas com essas quantidades, eram descritas com palavras, ao invés de serem representadas com símbolos, como na álgebra atual. A introdução dessa álgebra proporcionou avanços nas notações matemáticas, o que favoreceu o processo de desenvolvimento da generalização. O segundo desenvolvimento foi um método geométrico utilizando gráficos. Os gregos e árabes, por vezes, utilizavam a álgebra em conjunto com a geometria, e a ideia de descrever a posição de um ponto em relação às coordenadas retangulares era familiar aos geógrafos e astrônomos desde os tempos clássicos (HIGUERAS, 1993).

Oresme (1323-1382) utilizou as coordenadas retangulares para representar a velocidade em função do tempo (longitudes) de um corpo que se move com aceleração constante, e marcou pontos representando instantes de tempo. Para cada instante, traçou, perpendicularmente à reta das longitudes, um segmento de reta (latitude), em que o comprimento denotava a velocidade. Nesse caso, os termos latitude e longitude são equivalentes às ordenadas e abscissas na linguagem matemática atual. Vemos, aqui, uma sugestão primitiva do que hoje denominamos de representação gráfica das funções (PIRES, 2016).

Segundo Higueras (1993), Oresme distingue três tipos de figuras, chamadas por ele de movimento: i) uniforme; ii) uniformemente desforme; e iii) desforme.

i) Se considerarmos a representação da velocidade em função do tempo, podemos associar uma figura uniforme a uma velocidade constante, em que as intensidades são as mesmas, qualquer que seja o tempo gasto. Oresme traça um gráfico de velocidade-tempo em que os pontos de uma linha horizontal representam sucessivos instantes de tempo e, para cada um desses instantes, ele desenha um segmento perpendicular à linha desse ponto, cujo comprimento representa a velocidade naquele instante. Nesse caso, um retângulo é obtido. A Figura 1, a seguir, ilustra a representação figural para o movimento uniforme desenvolvido por Oresme.

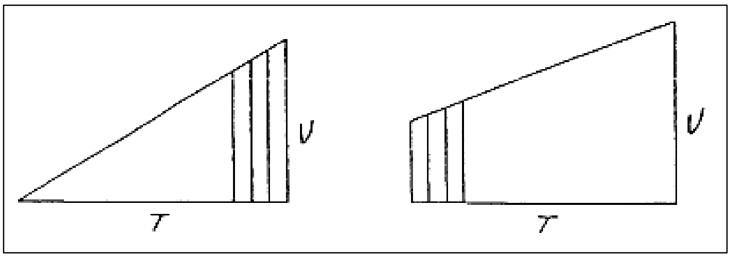
Figura 1 - Representação figural do movimento uniforme desenvolvido por Oresme



Fonte: Higueras (1993, p. 160).

ii) Uma figura uniformemente desforme corresponde a uma velocidade com aceleração constante. Nesse caso, a figura pode ser um triângulo ou um trapézio, dependendo da intensidade inicial. A Figura 2, a seguir, ilustra a representação figural do movimento uniformemente desforme desenvolvido por Oresme.

Figura 2 - Representação figural do movimento uniformemente desforme desenvolvido por Oresme



Fonte: Higueras (1993, p. 160).

Oresme expressou essa qualidade afirmando:

> É aquele em que, se tomarmos quaisquer três pontos da linha considerada, a razão da distância entre o primeiro e o segundo, e a distância entre o segundo e o terceiro, é como a razão entre o excesso em intensidade do primeiro ponto sobre o do segundo ponto, o excesso do segundo ponto sobre o do terceiro ponto (YOUSCHEVIKCH, 1976, p. 47, tradução nossa).

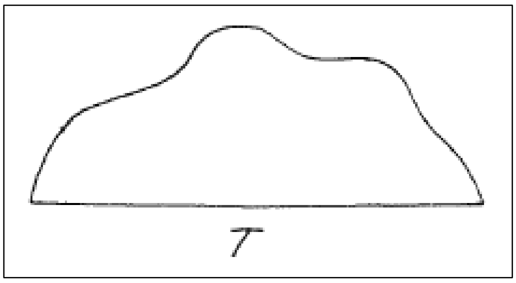
Como aponta Youschevikch (1976), a descrição de Oresme corresponde à equação da reta que passa por dois pontos dados $(x_{1,}y_1)$, $(x_{2,}y_2)$, que com notações atuais pode ser representada por:

$$\frac{y - y_1}{y_2 - y_1} = \frac{x - x_1}{x_2 - x_1}$$

Interpretamos que Oresme recorreu à linguagem natural para generalizar um movimento com aceleração constante por meio da equação da reta, o que representou um avanço para a ideia de generalização explicitada em linguagem natural. Com esse avanço, nota-se a articulação da representação gráfica desenvolvida por Oresme com as ideias de variável, dependência e generalização. Além disso, a ideia de regularidade, mesmo que de maneira implícita, também estava presente, ao passo que Oresme possivelmente considerou diversos estudos e apresentações de números particulares para, então, generalizar a equação da reta, apresentando-a na sua representação algébrica.

iii) A figura referente ao movimento desforme corresponde acelerações de velocidade não constantes. Assim, todos os casos em que a linha limite não é uma linha reta correspondem a casos deformados. A Figura 3, a seguir, ilustra a representação figural do movimento desforme desenvolvido por Oresme.

Figura 3 - Representação figural do movimento desforme desenvolvido por Oresme



Fonte: Higueras (1993, p. 161).

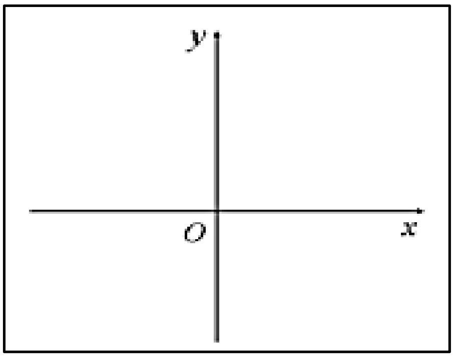
Observamos que as representações de Oresme foram mais qualitativas do que quantitativas. Segundo Higueras (1993), não podemos considerá-las como a expressão de uma dependência no sentido atual e, além disso, as relações funcionais não foram dadas analiticamente. Sem descrições analíticas simultâneas, as representações gráficas não poderiam ser usadas adequadamente para explicar fenômenos físicos. No entanto, alguns historiadores acreditam que ele antecipou Descartes na invenção da geometria analítica.

Embora ainda sem o rigor matemático que utilizamos atualmente, notamos que os indícios de desenvolvimento da representação gráfica possibilitou um avanço no conceito de função. As ideias-base de dependência, correspondência e variável são essenciais e possíveis de ser notadas nas representações gráficas desenvolvidas por Oresme ao descrever a velocidade em função do tempo, indicando, assim, a importância dessas ideias-base para o desenvolvimento e aprimoramento do conceito de função.

De acordo com Higueras (1993), Galileu (1564-1642), mais tarde, proporcionou grande contribuição para a evolução do conceito de função. Em seus estudos, buscava resultados e relações que vêm da experiência ao invés daqueles que vêm apenas da abstração. Para Galileu, a experimentação foi facilitada por novos instrumentos de medição e, assim, introduziu aspectos quantitativos em campo, em que antes eram apenas quantitativos. Galileu observava os astros, fazia experimentos, anotava seus resultados em gráficos e tabelas e, em seus estudos, mostrou que existe dependência entre duas *variáveis*. Ao contrário de Oresme, os gráficos de Galileu vêm de experiências e da medição (HIGUERAS, 1993). Segundo Higueras (1993), os estudos quantitativos de Galileu contribuíram grandemente para a evolução da noção de função. “[...] ele tinha o desejo de relacionar funcionalmente causas e efeitos, e essa necessidade foi um fator essencial na concepção de variável *dependente*” (HIGUERAS, 1993, p. 164, grifos nossos).

René Descartes (1596-1650) também afirmou claramente que uma equação em duas *variáveis*, geometricamente representada por uma curva, indica uma dependência entre quantidades variáveis. Logo, a construção de gráficos passou a fazer parte das representações das *variáveis* em um sistema cartesiano de referência, em que um eixo representa as variáveis dependentes e o outro representa as variáveis independentes (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019). A Figura 4 representa o sistema cartesiano usado até os dias de hoje. Nele é possível observar a variável dependente, representada no eixo horizontal (chamado de eixo *x* ou eixo das abcissas), *e a* variável independente, representada no eixo vertical (chamado de eixo *y* ou eixo das ordenadas). O ponto de interseção entre os eixos *x* e *y* é chamado de *origem* e é denotado por *O*.

Figura 4 - Modelo do plano cartesiano desenvolvido por René Descartes



Fonte: Autoras.

De acordo com Boyer (1996), Descartes considerou que, quando uma equação contém duas grandezas conhecidas, há um lugar correspondente entre elas, e o ponto extremo de uma dessas grandezas descreve uma linha reta ou uma linha curva. Para Boyer (1996), essa proposição constitui uma das afirmações mais significativas da história da matemática: ela introduz não apenas a geometria analítica, mas também a ideia de variável algébrica.

Segundo Youschkevitch (1976), em paralelo ao trabalho de Galileu, François Viète (1540-1603) utilizou uma linguagem simbólica para representar variáveis, atribuindo uma nova interpretação para a funcionalidade. Para Higueras (1993), os avanços na notação ajudaram a desenvolver a formulação do que agora consideramos variável em uma função ou incógnita em uma equação.

A criação da álgebra literal e simbólica, juntamente com a extensão correspondente do conceito de número, até o final do século XVI, abarca não apenas todo o campo nos números reais, mas também dos números imaginários e complexos. De acordo com Youschkevitch (1976), este fato foi preliminar na própria Matemática para a introdução do conceito de função como uma relação entre conjuntos de números em vez de quantidades. Essa linguagem possibilitou expressar a ideia de generalização da função em linguagem algébrica, o que representa um avanço para a formalização do conceito de função.

Foi possível colocar no papel, de forma simbólica, equações e expressões algébricas contendo quantidades desconhecidas e coeficientes arbitrários. No entanto, Viète não usou sua descoberta notável para promover o conceito de função. Logo descobriu-se que seu simbolismo possuía deficiências e foi alterado por vários estudiosos, estendendo-se, então, para além dos domínios da álgebra e sendo usado no cálculo infinitesimal. Descartes, Newton, Euler e outros estudiosos participaram desse processo de aperfeiçoamento do simbolismo matemático (YOUSCHKEVITCH, 1976).

A partir do início do século XVII, a nova concepção das leis quantitativas da natureza, como estabelecendo relações funcionais entre valores numéricos de quantidades físicas, vinha ganhando força em medida sempre crescente e tornando-se cada vez mais distinta. Nesse processo, a criação de um campo cada vez mais amplo de metrologia física com a introdução de medidas quantitativas de calor, pressão etc. desempenhou papel importante. O mesmo aconteceu com o rápido ganho na precisão de experimentos e observações, ocasionado pela invenção de vários instrumentos científicos. Como consequência de tudo isso, surgiu um novo método de introdução de funções, que se tornou, por muito tempo, o principal método em matemática e, principalmente, em suas aplicações. O método analítico de introdução de funções por meio de fórmulas e equações veio ao primeiro plano (YOUSCHKEVITCH, 1976).

Ainda, segundo Youschkevitch (1976), foi com os trabalhos publicados por Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) que o método analítico de introduzir funções por meio de fórmulas e equações começou a ganhar destaque. Foram eles que aplicaram a álgebra à geometria, descobrindo o mundo da representação analítica. Segundo Higueras (1993), a geometria analítica passou a ser formada como método de expressão das relações numéricas das dimensões, formas e propriedades dos objetos geométricos, utilizando essencialmente o método das coordenadas.

A ideia de generalização que, até então, era rudimentar, começou a ser formalizada. Contudo, a generalização das leis quantitativas em termos matemáticos, simbólicos e algébricos ocorreu de maneira lenta, na história. Somente a partir disso a função adquiriu uma formalização, o que revolucionou a Matemática e fez com que a função assumisse lugar de destaque no meio das ciências exatas (YOUSCHKEVITCH, 1976). A ideia de generalização acompanhou a gênese do conceito, quando ainda era rudimentar, informal, e está presente em sua formalização.

De acordo com Ciani, Nogueira e Berns (2019), em 1637, René Descartes apresentou ideias mais próximas ao conceito atual de função, ao estabelecer a interdependência entre os valores de um número x e qualquer potência de x. Segundo Youschkevitch (1976), Descartes apresentou, pela primeira vez e de forma clara, que uma equação em x e y é um meio para introduzir uma dependência entre quantidades variáveis, de modo a permitir o cálculo dos valores de uma delas correspondendo a um dado valor de outro:

> A introdução de funções na forma de equações causou uma verdadeira revolução no desenvolvimento da matemática. O uso de expressões analíticas, as operações com as quais são realizadas de acordo com regras estritamente especificadas conferia uma característica de cálculo regular ao estudo das funções, abrindo, assim, horizontes inteiramente novos (YOUSCHKEVITCH, 1976, p. 53, tradução nossa).

Além disso, “[...] a convenção do uso das primeiras letras do nosso alfabeto para indicar constantes e as últimas letras para indicar variáveis começou com Descartes em *La géométrie*” (EVES, 2004, p. 388). Devem-se também a Descartes nossa atual notação para potências e a concepção de que uma letra pode representar qualquer quantidade, positiva ou negativa. Ainda encontramos em Eves (2004) informações de que os primeiros registros da palavra "função" teriam sido feitos por Leibniz, em agosto de 1673. Em 1694, em uma carta para Jean Bernoulli, Leibniz utiliza os termos "variável independente" e "*functio*". Nesse caso, Leibniz utilizou a expressão "função" para designar quantidade associada a uma curva, como as coordenadas de um ponto da curva e o comprimento de uma tangente à curva. Ele também introduziu os termos "constante", "variável" e "parâmetro".

Segundo Ponte (1984), com o desenvolvimento do estudo de curvas por métodos algébricos, um termo para representar quantidades que eram dependentes de uma variável por meio de uma expressão analítica era cada vez mais necessário. Finalmente, o termo "função" foi adotado para esse fim em uma correspondência trocada entre Leibniz e Jean Bernoulli.

Em 1718, Bernoulli publicou um artigo que teve ampla divulgação, o qual continha a definição de uma função de uma variável como uma quantidade que é composta de alguma forma a partir de variáveis e constantes. Entretanto, com o avanço da Ciência, essa definição se mostrou insuficiente, pois era necessário evidenciar a dependência entre duas variáveis. Nesse tempo, houve a união dos campos geométrico e analítico (CARAÇA, 1963). Leonard Euler (1707-1783), em 1750, contribuiu para a definição de Bernoulli, acrescentando o termo "expressão analítica", em vez de "quantidade". Boyer (1996) afirma que se deve a Euler a notação *f(x)* para uma função em *x*. Fourier também contribuiu para o desenvolvimento do conceito de função. Ele estudou o fluxo de calor nos corpos materiais e, para tanto, considerava a temperatura como função de duas variáveis, o tempo e o espaço.

De acordo com Ponte (1984), a noção de função foi identificada na prática com a noção de expressão analítica. Essa formulação logo levou a várias incoerências. Na terminologia atual, podemos afirmar que a definição de Euler incluía apenas as funções analíticas, um subconjunto restrito da pequena classe de funções contínuas. Ciente dessas deficiências, Euler propôs uma definição alternativa que não atraiu muita atenção no momento. No que diz respeito à matemática convencional, a identificação de funções com expressões analíticas permaneceria inalterada por todo o século XVIII. No século XIX, entretanto, a noção de função sofreu ampliações sucessivas e esclarecimentos que mudaram profundamente sua natureza e significado.

Peter Gustav Lejeune Dirichlet (1805-1859) separou, em 1837, o conceito de função de sua representação analítica, lançando a definição de função em termos de uma correspondência arbitrária entre as variáveis que representam conjuntos numéricos. Dessa forma, uma função “[...] passou a ser entendida também como uma relação entre dois conjuntos, de modo que a cada valor da variável independente era possível associar um único valor da variável dependente” (PIRES, 2016, p. 8, grifos nossos).

No século XIX e início do século XX, o conceito de função passou por alguns refinamentos e apresentou descobertas referentes às funções contínuas, diferenciáveis e descontínuas em determinados pontos. Dentre as contribuições para a evolução do conceito de função no início do século XX, Pires (2016) cita aquela dada pelo grupo Bourbaki, que consistia em um grupo de jovens franceses com o compromisso de (re)organizar toda a Matemática conhecida até o momento. Bourbaki publicou, em 1939, o primeiro livro da coleção *Théorie des Ensembles*, que contém a seguinte definição de função:

> Sejam *E* e *F* dois conjuntos, distintos ou não. Uma relação entre uma variável *x* de *E* e uma variável *y* de *F* chama-se relação funcional em *y*, ou relação funcional de *E* em *F*, se, qualquer que seja *x* de *E*, existe um elemento *y* de *F,* e somente um, que esteja na relação considerada com *x*. Dá-se

> o nome de função à operação que associa a todo elemento *x de E* o elemento *y de F* que encontra na relação dada como *x;* diz-se que *y* é o valor da função para o elemento *x*, e que a função está determinada pela relação funcional considerada. Duas relações funcionais equivalentes determinam a mesma função (BOURBAKI, 1990, p. 6, *apud* Pires, 2016, p. 10).

Ao analisar a definição estabelecida por Bourbaki, é possível identificar a presença das ideias-base na definição do conceito de função. Nesse caso, a função representa uma operação que faz cada elemento *x* de *E* corresponder a um único elemento *y* de *F*; desta forma, a variável *y* é dada em uma relação de dependência com a variável *x.* Além disso, por meio da operação definida entre os conjuntos mencionados, a relação entre essas variáveis apresenta uma regularidade, sendo possível estabelecer uma generalização que representa a relação de correspondência entre as variáveis desses conjuntos.

Esta interpretação advinda da definição do conceito de função permite afirmar que as ideias-base – correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização - estão presentes em todo tipo de função.

A definição de Bourbaki, além de trazer a questão da unicidade de *y*, faz uma distinção entre relação funcional e função. De acordo com Pires (2016), apesar dos avanços que a representação algébrica de função proporcionou para o desenvolvimento de tal conceito, ela também contribuiu para um dos obstáculos epistemológicos intrínsecos a esse conceito: a ideia de que apenas relações que pudessem ser descritas por expressões analíticas poderiam ser chamadas de função. Esse obstáculo só foi superado quando Riemann-Dirichlet, no século XIX, separou o conceito de função da expressão analítica e definiu função como uma correspondência arbitrária entre variáveis que representam conjuntos numéricos.

Youschkevitch (1976) observa que a regra funcional mencionada na definição pode ser introduzida em várias formas: verbalmente; por uma tabela de valores de *x* e *y*; por uma expressão analítica; por um gráfico, etc., sujeita apenas à condição de que essa regra seja definida e, uma vez que o valor de *x* seja dado, suficiente para encontrar *y*. Ao longo do processo histórico de desenvolvimento do conceito de função, foi possível observar as ideias-base presentes em cada uma dessas formas de mencionar a relação funcional.

Ciani, Nogueira e Berns (2019) mencionam que na definição de Riemann-Dirichlet, citada anteriormente, aparece a palavra "conjunto"*;* no entanto, a noção ainda era de variáveis representativas de conjuntos numéricos, já que não existia a Teoria dos Conjuntos desenvolvida por Cantor (1845-1918). A partir dessa teoria, as funções foram definidas em termos de pares ordenados de elementos de conjuntos, permitindo que esses elementos não fossem necessariamente números. Então, se f é uma função e $(a,b) \in f$, escreve-se $b = f(a)$, em que o conjunto A chama-se domínio de uma função e o conjunto B chama-se imagem de uma função (EVES, 2004).

A definição de função “[...] adquiriu, então, uma forma eminentemente matemática e o conceito de função possui, hoje, uma amplitude tal que independe da natureza do campo em que é aplicado” (CIANI; NOGUEIRA; BERNS, 2019, p. 46). Segundo Ponte (1984), a evolução da função continuou. Da noção de correspondência, os matemáticos mudaram para a noção de relação.

Caraça (1963) apresenta, ainda, uma definição de função usada até os dias de hoje: sejam x e y duas variáveis representativas de conjuntos de números, diz-se que y é função de x e escreve-se $y = f(x)$ se entre as duas variáveis existe uma correspondência unívoca no sentido de $x \rightarrow y.$ A x chama-se variável independente e a y variável dependente. Na definição de função apresentada pelo autor também se nota a presença das ideias-base, pois aqui a função faz corresponder as variáveis de dois conjuntos estabelecendo uma relação de dependência entre elas. A generalização decorre da regularidade estabelecida entre as variáveis dependente e independente. Contudo, as funções já não são apenas previsões, o grau de generalização das funções supera o real e exige que a abstração seja fundamental no entendimento desse conceito (NOGUEIRA, 2014).

4. Considerações finais

Neste ensaio, a intensão foi apresentar um estudo histórico e epistemológico acerca da construção do conceito de função, explicitando suas "ideias base" – correspondência, dependência, variável, regularidade e generalização.

O estudo apresentado mostra que ideias de função, tais como correspondência, dependência, variável e regularidade, estiveram presentes desde as escritas em tabletes de argila, feitas pelos povos babilônios por volta de 2.000 a. C. Já a ideia de generalização foi a última das ideias-base notadamente explicitada no processo histórico de construção do conceito de função.

Apesar de os primeiros indicativos de ideias de função serem identificados há 2.000 a.C., para a formalidade do conceito de função foram essenciais o estabelecimento de símbolos, da representação gráfica e da formalização da ideia de generalização.

Afinal, foi somente a partir do século XVII, com o desenvolvimento da ideia de generalização que o conceito de função atingiu um grau de formalidade. Segundo Youschkevitch (1976), foi com os trabalhos publicados por Pierre Fermat (1601-1665) e René Descartes (1596-1650) que o método analítico de introduzir funções por meio de fórmulas e equações começou a ganhar destaque. A ideia de generalização, que até então era rudimentar, começou a ser formalizada. Somente a partir da generalização das leis quantitativas, em termos matemáticos, simbólicos e algébricos que a função adquiriu uma formalização e assumiu lugar de destaque no meio das ciências exatas (YOUSCHKEVITCH, 1976).

Pesquisas (REZENDE, NOGUEIRA, CALADO, 2020; CALADO, 2020) mostram que, dentre as ideias-base de função, a generalização é a mais complexa, sendo um dos principais motivos de dificuldades de compreensão do conceito de função por estudantes da Educação Básica. Uma hipótese é que tal dificuldade manifestada pelos estudantes seja reflexo do longo período que a noção de generalização levou para a sua formalização.

Desta forma, concordamos com Ciani, Nogueira e Berns (2019), que é essencial que o professor compreenda o longo processo de estabelecimento do conceito de função para entender que a formação deste conceito pelos alunos também é um processo complexo e demorado a ser desenvolvido no decorrer da escolarização. Neste sentido, ressaltamos a importância de as ideias-base do conceito de função serem exploradas a partir dos Anos Iniciais do Ensino Fundamental.

Referências

AABOE, Asger. **Episódios da História Antiga da Matemática**. 2ª Ed. Tradução de João Bosco Pitombeira de Carvalho. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática - SBM, 2002.

ALMOULOUD, Saddo Ag. **Fundamentos da didática da matemática**. 2ª reimpressão. Curitiba: Ed. UFPR, 2014.

ARDENGHI, Marcos José. **Ensino Aprendizagem do Conceito de Função:** pesquisas realizadas no período de 1970 a 2005 no Brasil. 2008. 182f. Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontifícia Universidade Católica de São Paulo PUC-SP, São Paulo, SP, 2008.

ARTIGUE, Michèle. Engenharia Didática. *In:* BRUN, Jean (Org.). **Didáctica das Matemáticas**. Lisboa: Horizontes Pedagógicos, 1996. p.193-217.

BARBOSA, Cerqueira Jonei. Abordagens teóricas e metodológicas na Educação Matemática: aproximações e distanciamentos. *In*: OLIVEIRA, Andréia Maria Pereira de; ORTIGÃO, Maria Isabel Ramalho (Org.). **Abordagens Teóricas e Metodológicas nas Pesquisas em Educação Matemática.** Brasília: SBEM, 2018. p. 17-57.

BOYER, Carl B. **História da Matemática**. 2. ed. São Paulo: Edgard Blucher, 1996.

BRASIL. Ministério da Educação. Conselho Nacional de Educação. **Diretrizes Curriculares** – Cursos de Graduação. Brasília: MEC, 2001.

BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria da Educação. **Base Nacional Comum Curricular** – Ensino Fundamental. Brasília: MEC, 2018.

CALADO, Tamires. Vieira. **Invariantes operatórios relacionados à generalização:** uma investigação com estudantes do 9º ano a partir de situações que envolvem função afim. 197f. Dissertação (Mestrado em Educação em Ciências e Educação Matemática) – Programa de Pós-Graduação em Educação em Ciências e Educação Matemática, Universidade Estadual do Oeste do Paraná – UNIOESTE, Cascavel, 2020.

CAMPITELI, Heliana Cioccina; CAMPITELI, Vicente Coney. **Funções**. Ponta Grossa: UEPG, 2006.

CARAÇA, Bento de Jesus. **Conceitos Fundamentais da Matemática**. 1. ed. Lisboa, 1963.

CARVALHO, Edmo Fernandes. **Integração de noções didáticas nas praxeologias matemáticas no estudo da função quadrática.** 163f. Tese (Doutorado em Ensino, Filosofia e História das Ciências) – Universidade Federal da Bahia, Salvador, 2019.

CHAQUIAM, Miguel. *In*: FOSSA, John Andrew (Org**.) O olho do Mestre Dez livros – Textos Históricos.** Campina Grande: EDUEPB, 2021. p. 217-243.

CIANI, Andréia Buttner; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; BERNS, Mauricio. A construção do conceito de função: aspectos teóricos, históricos e didáticos. *In*: CEOLIM, Amauri Jersi; REZENDE, Veridiana; HERMANN, Welington (Org.) **Diálogos entre a Educação Básica e a Universidade**: reflexões a cerca do conceito de função nas aulas de matemática. Curitiba: CRV, 2019. p.29-50.

EVES, Howard. **Introdução à história da matemática**. Tradução de Hygino H. Domingues. Campinas, SP: Editora da Unicamp, 2004.

HIGUERAS, Luisa Ruiz. **Cocepciones de los alunos de secundaria sobre la noción de función:** Análisis epistemológico y didáctico. 291f. Tesis (Doutorado em Didáctica de la Matemática) – Universidad de Granada, Granada, 1993.

NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius. Construindo o conceito de funções. *In*: Ramos, A. S.; Rejani, F. C. **Teoria e Prática de Funções**. Maringá: Unicesumar, 2014.

NUNES, C. B.; SANTANA, E. R. S. Concepções Errôneas de Alunos de Licenciatura em Matemática Sobre o Conceito de Função. **JIEEM**, v.10, n.2, p. 65-71, 2017.

PAVAN, Luciane Regina. **A mobilização das ideias básicas do conceito de função por crianças da 4ª serie do Ensino Fundamental e Situações-problema de Estruturas Aditivas e/ou Multiplicativas.** 2010. 195 p. Dissertação (Mestrado) – Universidade Estadual de Maringá, Maringá – PR, 2010.

PINTO, Carolina Freire. **Dissertações brasileiras sobre o ensino de função afim, a partir da implementação de sequências didáticas, produzidas no período de 2009 a 2012:** questões para formação de professores e para pesquisa. 188f. Dissertação (Mestrado em Ensino de Matemática) - Universidade Federal do Rio de Janeiro, Rio de Janeiro, 2014.

PIRES, Rogério Fernandes; MERLINE, Vera; MAGINA, Sandra. Função: Concepções Manifestadas por um Grupo de Professores. **Educação Matemática em Revista**, v.20, n.44, p. 21-29, 2015.

PIRES, Rogério Fernandes. O conceito de função: uma análise histórico epistemológica. *In:* **Anais** […] XII Encontro Nacional de Educação Matemática. São Paulo, SP. Anais. São Paulo: SP, 2016.

PONTE, João Pedro Mendes da. **Functional reasoning and the interpretation of Cartesian graphs.** 229f. Tese (Doctor of education) – University of Lisbon, Georgia, 1984.

QUEIROZ, Paulo César Galvão. **Conhecimentos relativos à variável, mobilizados por professores da Educação Básica.** Dissertação (Mestrado em Educação Matemática) – Pontificia Universidade Católica de São Paulo, 2008.

RAMOS, Maria Luisa; CURI, Edda. Modelo de Análise Didática dos Erros: um guia para analisar e tratar erros referentes à função polinomial do 2º grau. **REVEMAT**, v.9, n. 1, p. 27-42, 2014.

REZENDE, Veridiana; NOGUEIRA, Clélia Maria Ignatius; CALADO, Tamires Vieira. Função afim na Educação Básica: estratégias e ideias base mobilizadas por estudantes mediante a resolução de tarefas matemáticas. *In*: **Alexandria: Revista de Educação em Ciências e Tecnologia**. Florianópolis, v.13, n.2, p.25-50, 2020.

RIBEIRO, Alessandro Jacques; CURY, Helena Noronha. **Álgebra para a formação do professor:** explorando os conceitos de equação e de função. Belo Horizonte: Autêntica, 2015.

TINOCO, Lucia Arruda Albuquerque. **Construindo o conceito de Função**. 5º ed. Rio de Janeiro: Projeto Fundão, 2002.

TINOCO, Lucia Arruda Albuquerque. **Álgebra:** pensar, calcular, comunicar....2º ed. Rio de Janeiro, Projeto Fundão, 2011.

VERGNAUD, Gérard. O que é aprender? *In*: BITTAR, Marilena. MUNIZ, C. A (Org.) **A aprendizagem Matemática na perspectiva da Teoria dos Campos Conceituais.** Curitiba: CRV, 2009.

YOUSCHKEVITCH, Adolf Pavlovich. The Concept of Function up to the Middle of the 19th Century. *In*: Springer. Source: **Archive for History of Exact Sciences**. v. 16, 1976, p. 37-85.

Contribuição dos autores

Autora 1: Participação ativa na discussão dos resultados, análises e produção do manuscrito.

Autora 2: Contribuição substancial para a concepção e análise, interpretação dos dados e revisão final.

Enviado em: 09/setembro/2021 | Aprovado em: 04/fevereiro/2022