Artigo

O ensino de probabilidade geométrica por meio de fractais e da resolução de problemas

The teaching of probability geometric by means fractals and the problem solving

José Marcos Lopes[1]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Brasil

José Antonio Salvador[2]
Universidade Federal de São Carlos, UFSCar, Brasil

Inocêncio Fernandes Balieiro Filho[3]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho", UNESP, Brasil

Resumo

Apresentamos neste artigo uma proposta didático-pedagógica para o ensino do conceito de Probabilidade Geométrica por meio do uso de fractais. Para isso, formulamos problemas que, ao serem resolvidos pelos alunos, podem levá-los à construção ou reconstrução do conceito de Probabilidade Geométrica. Num primeiro momento, os problemas têm como propósito ensinar Matemática. Os problemas foram formulados utilizando fractais, como por exemplo, o Triângulo de Sierpinski. Após o trabalho com os problemas, o professor deverá sistematizar os conceitos estudados mediante o formalismo e o rigor característicos dessa ciência. Os temas explorados foram a definição de Probabilidade Geométrica e problemas envolvendo os conceitos de Evento Complementar, União de dois Eventos e o conceito de Probabilidade Condicional. Os problemas aqui apresentados são originais e podem fornecer subsídios para os professores do Ensino Médio que trabalham, ou que desejam trabalhar com conceitos de Probabilidade Geométrica.

Palavras-chave: Ensino; Probabilidade Geométrica; Resolução de Problemas; Fractais e Triângulo de Sierpinski.

Abstract

In this paper we present a pedagogical purpose for the geometrical probability teaching using fractals. For that, some problems were elaborated with the proposed of conduce the students in construction of geometrical probability concept. Firstly, the problems has the purpose teach mathematics. The problems were elaborated with the use of fractals, like The Sierpinski triangle. After the work with the problems, the teacher must systematize the concepts that were studied for means of the mathematics formalism and mathematics rigor. The themes explored were geometrical probability definition and problems that involved the complementary event concept, union of two events and conditional probability concept. In this work, we present problems originals that can offer aid possibility to the high school teachers that work or that wish work with the geometrical probability concept.

Keywords: Theaching; Geometric Probability; Problem Solving; Fractals and Sierpinski's Triangle.

---

1 Professor Livre Docente da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/UNESP, Doutor em Teoria e Controle e Estatística, PUC-Rio. E-mail: jmlopes@mat.feis.unesp.br.

2 Professor Adjunto da Universidade Federal de São Carlos – UFSCar, Doutor em Matemática, UFRJ. E-mail: salvador@dm.ufscar.br

3 Professor Doutor da Faculdade de Engenharia de Ilha Solteira - FEIS/UNESP, Doutor em Educação Matemática, UNESP. E-mail: balieiro@mat.feis.unesp.br

Introdução

Os fenômenos aleatórios são inerentes às nossas vidas e aparecem em muitas situações cotidianas ou de nossa vida profissional. Como exemplos, podemos citar: a previsão do tempo, um diagnóstico médico, o estudo da possibilidade de contratar ou não um seguro de vida, o número de acidentes em uma cidade, etc.

A Probabilidade é o ramo da Matemática que estuda os fenômenos aleatórios e deve ser apresentada aos alunos desde seus diferentes enfoques, que estão relacionados e aportam as diversas partes necessárias para a compreensão global do conceito. Um enfoque puramente experimental do ensino de probabilidade não é suficiente. Um conhecimento genuíno de probabilidade só se alcança com o estudo de alguma probabilidade formal, ainda que este estudo deva ser gradual e apoiado na experiência estocástica dos estudantes (BATANERO, 2006).

No Brasil, o conceito de Probabilidade Geométrica geralmente não é apresentado nos livros didáticos de Matemática para o Ensino Médio. Lima (2001), em uma análise de 12 coleções de livros didáticos de Matemática utilizados nos três anos do Ensino Médio das escolas brasileiras, encontrou o tópico Probabilidade Geométrica em apenas uma delas. Entretanto, em congressos recentes sobre Educação Matemática realizados em nosso país, têm sido apresentados e discutidos alguns trabalhos sobre o tema Probabilidade Geométrica, como é o caso de Abe e Bittar (2010), Ferreira et al. (2010), Neves, Contini Neto e Mendonça (2011) e Junqueira, Campos e Watabe (2011). Além disso, na Revista do Professor de Matemática, publicada pela Sociedade Brasileira de Matemática, também podemos encontrar alguns artigos sobre Probabilidade Geométrica: Paterlini (2002), Tunala (1992) e Wagner (1997).

Não é objetivo deste artigo discutir as razões pelas quais o conceito de Probabilidade Geométrica é pouco estudado no Ensino Médio brasileiro. Porém, entendemos que o conceito de probabilidade geométrica é adequado para introduzir, no Ensino Médio, a importante noção de probabilidade contínua.

Em problemas de probabilidade geométrica, os possíveis acontecimentos podem ser representados por pontos de um segmento de reta, por figuras planas ou ainda por sólidos. Como o número de acontecimentos é usualmente não contável, não podemos definir probabilidade como a razão entre os casos favoráveis e o número total de casos. Todavia, podemos ainda definir a probabilidade de um evento de uma maneira natural e calculá-la segundo considerações geométricas (EISEN, 1969).

Parece consenso que a noção de Probabilidade Geométrica foi introduzida pelo matemático e naturalista francês Georges Louis Leclerc, o conde de Buffon. Em 1777, Buffon apresenta em seu *Essai d'Arithmétique Morale* o seguinte problema que ficou conhecido como o *Problema da Agulha de Buffon*: "Considerando-se uma família de retas paralelas em $\Re^2$, em que duas paralelas adjacentes arbitrárias distam de a unidades. Tendo-se lançado, ao acaso, sobre o plano, uma agulha de comprimento l ($l \leq a$), determinar a probabilidade de que a agulha intercepte uma das retas." Segundo Tunala (1992), para um grande número de lançamento da agulha, a solução desse problema nos sugere um método experimental para o cálculo do valor aproximado de p.

No mesmo livro citado anteriormente, Buffon discute o *Jogo dos Discos*: "Em um plano pavimentado com quadrados de lado *l* é lançado aleatoriamente um disco de diâmetro *d*. Qual a probabilidade de o disco, depois de pousar no plano, não intersectar e nem tangenciar os lados de quadrado algum?". Esse jogo era bastante apreciado e jogado pelas crianças francesas do século XVIII (PATERLINI, 2002). O Jogo dos Discos é também conhecido como *Jogo dos Ladrilhos* ou ainda como *Franc-Carreau*.

Coutinho (2005) apresenta um trabalho com enfoque experimental, em ambiente informatizado, no qual os alunos utilizam o *software* Cabri-Géomètre II na simulação do jogo de Franc-Carreau para estimar a Urna de Bernoulli que melhor o representa. A autora manifesta que foram obtidos bons resultados com a modelização do jogo de Franc-Carreau. Suas análises mostram que os alunos aceitam a utilização do modelo pseudoconcreto, Urna de Bernoulli, para representar o jogo de Franc-Carreau e, são capazes de formular uma composição para essa urna, valendo-se da associação entre o jogo e o sorteio em um pote com contas coloridas e com o sorteio de um pixel ao acaso em uma figura-Cabri. Essas experiências foram realizadas com alunos franceses que frequentavam o que corresponde ao último ano do Ensino Fundamental e primeiro ano do Ensino Médio do Brasil.

Os trabalhos de Gomes, Salvador e Paez (2010) e Weiss et al. (2011) mostram o uso de fractais em salas de aula da educação básica. A geometria fractal, por meio de conexões e da interdisciplinaridade, apresenta um potencial histórico e cultural para explorar conteúdos matemáticos como, por exemplo, a Probabilidade Geométrica. Especificamente, a História da Matemática nos possibilita ter uma visão abrangente dessa ciência para relacionar tais conteúdos.

O objetivo principal deste artigo é mostrar que o fractal conhecido como Triângulo de Sierpinski pode ser utilizado, com a formulação de problemas adequados, para a introdução do conceito de Probabilidade Geométrica e também para o trabalho com o conceito de Probabilidade Condicional.

Um breve histórico sobre a teoria das probabilidades e da geometria fractal

Durante o século XVI alguns eruditos italianos iniciaram estudos sobre as probabilidades em relação ao jogo de dados. Em 1494, L. Pacioli (1445 – 1514) publica sua obra *Summa de Arithmetica, Geometria, Proportioni et Proportionlita*, que também discute os jogos de azar. No tratado *Liber de Ludo Aleae*, de 1576, só publicado em 1663, G. Cardano (1501 – 1576) enuncia regras válidas para solucionar problemas de jogos de dados e tece algumas considerações em relação a precauções para evitar armadilhas nos jogos de azar. Em 1653, B. Pascal (1623 – 1662) escreve o *Traitè du Triangle Arihtmétique* que descreve e demonstra algumas propriedades e aplicações do triângulo de pascal, já conhecido pelo matemático chinês Zhu Shiji (1260 – 1320) e M. Stifel (1487 – 1567). Porém, o estudo sistemático do cálculo de probabilidade surge em 1654, em virtude da troca de correspondências entre B. Pascal e P. Fermat (1601 – 1665), por causa de dois problemas: 1) o problema dos dados - quantas vezes deve-se lançar um par de dados antes que se obtenha um duplo seis; 2) o problema dos pontos - como dividir as apostas de dois jogadores, quando o jogo de dados não terminou.

Para resolver esses problemas, ainda que não tenha obtido uma solução completa, Pascal relacionou-os com o estudo do triângulo aritmético. Em relação aos dois problemas, nem Pascal ou Fermat publicaram seus resultados sobre esse assunto; porém, C. Huygens (1629 – 1695) interessou-se pelo tema discutido e publicou, em 1657, alguns problemas de Fermat e Pascal, acrescentando outros, em um breve tratado intitulado *De Ratiociniis in Ludo Aleae*.

Em sua obra póstuma, *Ars Conjectandi*, publicada em 1713, Jakob Bernoulli (1654 – 1705) fornece uma contribuição importante à teoria das probabilidades, por apresentar estudos sobre permutações, combinações, soluções de diversos problemas sobre jogos de azar, além do teorema que leva seu nome e que se refere à lei dos grandes números, e propõe aplicações dessa teoria a temas de ordem civil, moral e econômica.

Em 1711, A. De Moivre (1667 – 1754), publicou um trabalho intitulado *De Mensure Sortis, seu, de Probabilitate Eventuum in Ludis a Casu Fortuito Pendentibus* que expõe suas ideias principais sobre as leis do azar; em 1718, publicou seu notável tratado *The Doctrine of Chances: or, a Method of Calculating the Probabilities of Events in Plays* e, em 1730, *Miscellanea Analytica de Seriebus et Quadraturis*. Nesses trabalhos, De Moivre deixou preciso os princípios do cálculo de probabilidades, desenvolveu uma teoria de sucessões recorrentes, resolveu problemas relacionados com dados, urnas e partidas, estudou a teoria de permutações e combinações com base nos princípios de probabilidades, encontrou extensões do teorema de Bernoulli, enunciou a regra de probabilidade composta, demonstrou o teorema central do limite aplicado ao lançamento de uma moeda e descobriu a distribuição normal de frequência.

L. Euler (1707 – 1783) enriqueceu alguns ramos da matemática pura e aplicada e, em especial, contribuiu para a teoria de probabilidades com a publicação de vários trabalhos: *Calcul de la Probabilité dans Jeu de Rencontre* (1751), *Recherches Générales sur la Mortalité et la Multiplication du Genre Humain* (1760), *Sur la Probabilité des Séquences dans la Lotterie Génoise* (1765) e *Solution d'une Question tres Difficile dans le Calcul des Probabilités* (1769). J. R. d'Alembert (1717 – 1783), de 1751 a 1772, colaborou ainda com D. Diderot (1713 – 1784) nos vinte e oito volumes da célebre *Encyclopédie Méthodique* e, num artigo que trata de probabilidade, d'Alembert escreveu *Reflexions sur le Calcul des Probabilités*.

Thomas Bayes (1702 – 1761) estudou o problema da determinação da probabilidade das causas mediante os efeitos observados e deduziu o teorema que leva seu nome, que se refere à probabilidade condicional e a sua inversa, publicado no *Essay Towards Solving a Problem in the Doctrine of Chances,* em 1763.

G. L. Leclerc (1707 – 1788), conde de Buffon, ficou conhecido pelos vários volumes de sua obra denominada *Histoire Naturelle, Générale et Particuliere*. Porém, por seu interesse especial pela Matemática, publica em 1777 seu *Essai d'Arithmétique Morale*. Nesse trabalho, distingue certeza física e certeza moral e utiliza a geometria como instrumento da teoria de probabilidades.

P. S. Laplace (1749 – 1827), em sua obra *Théorie Analytique des Probabilités*, publicada em 1812, expõe os princípios gerais da teoria de probabilidades e trata das funções geratrizes com uma e duas variáveis, da teoria de aproximação, da integração por aproximação, da probabilidade de eventos compostos, da probabilidade de erros e de diversas aplicações da probabilidade. Desse modo, Laplace realizou importantes contribuições ao cálculo de probabilidades.

S. D. Poisson (1781 – 1840), em seu tratado *Recherches sur la Probabilité des Jugments*, de 1837, aborda a conhecida distribuição de Poisson. J. H. Poincaré (1854 – 1912) e E. Borel (1871 – 1956) que, por sua vez, se destacaram por seus estudos sobre probabilidade.

As pesquisas do matemático russo P. L. Chebyshev (1821 – 1894) possibilitaram uma construção da teoria de probabilidades com um aparato da análise matemática, estabelecendo definições rigorosas das propriedades das esperanças matemáticas e encontrando uma formulação geral para a lei dos grandes números. Também introduziu a desigualdade, o polinômio e o teorema de Chebyshev e deu uma demonstração geral do teorema do limite central. Tais contribuições são notáveis porque se referem à teoria de erros (introduzida por Laplace) e às propriedades da convergência em probabilidade.

Os discípulos de Chebyshev, A. A. Markov (1856 – 1922) e A. M. Liapunov (1857 – 1918), desenvolveram algumas de suas pesquisas em teoria de probabilidades; o primeiro, na teoria das cadeias de Markov e o segundo, no método das funções características. Um estudo aprofundado sobre a teoria de probabilidades foi efetuado por Kolmogorov, em 1928, no qual encontrou condições necessárias e suficientes para a lei dos grandes números e a lei de iteração logarítmica para as somas de variáveis aleatórias independentes. Já em 1929, ele propõe um sistema de axiomas para a teoria de probabilidades inspirado na teoria de medida e na teoria de funções de variáveis reais e a formaliza em 1933; nesse mesmo ano, publica o livro *Fundamentos do Cálculo de Probabilidades*.

Uma história sobre a teoria matemática das probabilidades do tempo de Pascal à Laplace pode ser encontrada em Todhunter (1865).

Na Matemática do final do século XIX e início do século XX surgiram algumas pesquisas sobre conjuntos de pontos do plano euclidiano, considerados pelos matemáticos desse período como bizarros e estranhos.

Em 1834, B. Bolzano (1781 – 1848) construiu uma função contínua num intervalo que não tinha derivada em ponto algum desse intervalo e, em 1874, K. Weierstrass (1815 – 1897) também constrói a sua função com essas características.

Em 1890, o artigo de G. Peano (1858 – 1932), intitulado *Sur une courbe, qui remplit toute une aire plane*, apresentou a curva de Peano. Um ano mais tarde, D. Hilbert (1862 - 1943) publica *Über die stetige Abbildung einer Linie auf ein Flächenstück*, no qual explora uma variante da curva de Peano. Em um trabalho publicado em 1883, *Ueber unendliche, lineare Punktmannichfaltigkeitene*, G. Cantor (1845 – 1918) estuda as propriedades de um conjunto de ponto. A curva de Koch, inventada em 1904 por H. Von Koch (1870 – 1924), aparece no trabalho intitulado *Une méthode géométrique élémentaire pour l'étude de certaines questions de la théorie des courbes planes*. Os estudos de G. M. Julia (1893 – 1978) e P. J. L. Fatou (1878 – 1929) abordam o mapeamento do plano complexo e funções iterativas. Nos trabalhos *Sur une courbe dont tout point est un point de ramification* e *Sur une courbe cantorienne qui contient une image biunivoquet et continue detoute courbe donnée* de W. Sierpinski (1882 – 1969), publicados em 1915 e 1916, aparece o famoso triângulo que leva seu nome e F.

Hausdorff (1868 -1942) estabelece, em 1919, uma definição alternativa para a dimensão de conjuntos arbitrários de R^n.

Porém, a comunidade Matemática desse período se referia a essas curvas como “monstros patológicos” e não via relevância alguma nesses estudos para o mundo real. Atualmente, é evidente o equívoco dessa visão, uma vez que a estrutura fractal parece compor toda a natureza viva, desde a constituição microscópica de nosso planeta e das trajetórias das partículas elementares, até a espantosa vastidão de aglomerados de galáxias do Universo. A Geometria Fractal, ramo da Matemática, é um legado histórico estabelecido por uma gama de matemáticos e que foi desenvolvida pelos importantes trabalhos de Benoit B. Mandelbrot (1924 – 2010). As pesquisas sobre geometria fractal têm sido uma fonte inesgotável de ideias úteis para diversos campos do conhecimento científico. Essas investigações vêm trazendo contribuições em diferentes áreas da ciência, em particular, na Física, na Biologia, na Química, na Geografia, na Economia, na Astrofísica e nas Engenharias.

Uma das características de um conjunto fractal é a autossimilaridade, isto é, ele apresenta certas complexidades, como a de que geralmente subconjuntos se repetem em diferentes escalas dentro dele mesmo (comportamento este diferente da geometria euclidiana), que podem ser vistos mediante um sistema de funções iteradas, cuja exploração é facilitada com o auxílio de programas computacionais. Um fractal pode ser visto como um conjunto invariante ou de pontos fixos (atratores) de um conjunto de funções iteradas de um espaço métrico nele mesmo. Mandelbrot definiu um fractal como um conjunto cuja dimensão de Hausdorff-Besicovitch excede estritamente a dimensão topológica. A dimensão de Hausdorff, que nos dá a noção da medida da “densidade” ou “raridade” de um conjunto, exige estudos avançados da teoria da medida, e a dimensão topológica requer estudos de topologia e dos espaços métricos (EDGAR, 2000).

A geometria fractal é um importante ramo da investigação matemática, sendo fonte de pesquisas, como o estudo geométrico de atratores caóticos que aparecem em sistemas dinâmicos e com aplicações em várias áreas da ciência como, por exemplo, em modelos para reconhecimento de padrões, na compressão de arquivos (imagens), na detecção automática de falhas em produtos industriais, na análise da rugosidade e medição da densidade de objetos, na evolução da economia e de populações, das oscilações do coração, de problemas ecológicos e demais formas da natureza que apresentam irregularidades.

O leitor interessado em uma leitura mais aprofundada sobre a geometria fractal pode consultar, por exemplo: Mandelbrot (1983), Barnsley (1988), Falconer (1990) e Peitgen (2004).

Definição de Probabilidade Geométrica

Considerando o objetivo deste artigo, vamos apresentar uma proposta didático-pedagógica na qual o conceito de Probabilidade Geométrica é sistematizado por meio do uso de fractais. Basicamente, utilizamos problemas envolvendo fractais, cujas resoluções podem levar os alunos a construir ou reconstruir o conceito de Probabilidade Geométrica. Assim, num primeiro momento utilizamos o problema para ensinar Matemática.

Nossa proposta está de acordo com o estabelecido por Van de Walle,

> Os estudantes devem resolver problemas não para aplicar matemática, mas para aprender nova matemática. Quando os alunos se ocupam de tarefas bem escolhidas baseadas na resolução de problemas e se concentram nos métodos de resolução, o que resulta são novas compreensões da matemática embutida na tarefa (VAN DE WALLE, 2009, p. 58).

Um problema voltado para a aprendizagem matemática deve conter as três seguintes características básicas:

- o problema deve começar onde os alunos estão;
- o aspecto problemático ou envolvente do problema deve estar relacionado à matemática que os alunos vão aprender;
- a aprendizagem matemática deve requerer justificativas e explicações para as respostas e os métodos (VAN de WALLE, 2009, p. 57-58).

O conceito (definição) de Probabilidade Geométrica poderá ser sistematizado com a solução dos dois seguintes problemas.

Problema 1. Considere um triângulo equilátero. Determine os pontos médios de cada um de seus lados. Construa um novo triângulo equilátero unindo esses pontos. Esse novo triângulo central, interno ao triângulo original é chamado de buraco. Escolhendo-se ao acaso um ponto no triângulo equilátero original qual a chance desse ponto "cair" no buraco? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

Os alunos, em grupo, usando sua própria linguagem, deverão apresentar suas soluções. O professor deve acompanhar, intermediar e orientar o trabalho dos alunos, mas não oferecer a resposta, devendo responder uma pergunta com outras perguntas, de forma a induzi-los no caminho da solução.

Após o trabalho dos grupos, uma pequena plenária liderada pelo professor deverá discutir as soluções apresentadas, as certas e também as erradas, dando ênfase ao processo e às estratégias de resolução (POLYA, 1973).

Em seguida, podemos sugerir a solução apresentada no parágrafo a seguir, com base na representação geométrica descrita pelo problema, conforme a Figura 1. Podemos também ressaltar a semelhança dos triângulos e observar a área do triângulo inicial e a do buraco triangular formado.

O triângulo equilátero original foi dividido em quatro novos triângulos equiláteros de mesma área. Como o buraco corresponde a um desses quatro triângulos, então temos uma chance em quatro de "cair" no buraco, se escolhermos ao acaso um ponto do triângulo original. A chance do ponto escolhido ao acaso estar sobre um dos triângulos restantes é 3 em 4. Finalmente, propomos uma discussão para verificar se o resultado parece razoável para os alunos.

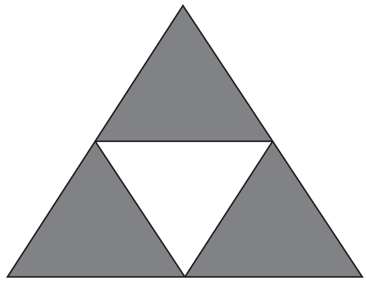

Figura 1 - Representação geométrica para o Problema 1.

Problema 2. Considere agora um quadrado. Divida cada lado desse quadrado em três segmentos congruentes, de forma que o quadrado inicial se divida em 9 quadrados menores. Chamamos de buraco o quadrado interno central. Escolhendo-se ao acaso um ponto no quadrado inicial qual a chance desse ponto "cair" no buraco? Justificar sua resposta.

Comentários e sugestões.

São válidas aqui as mesmas considerações feitas para o *Problema 1*. Uma forma de apresentar a solução é considerar a construção geométrica. A Figura 2 descreve essa representação.

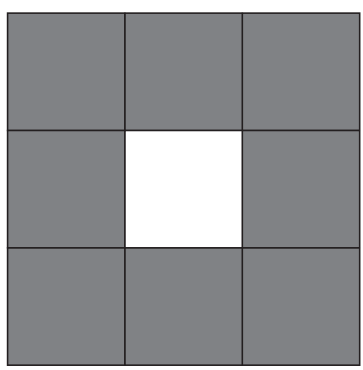

Figura 2 - Representação geométrica para o Problema 2.

Como o quadrado inicial foi dividido em nove quadrados menores de mesma área e como o buraco é um desses quadrados, então temos uma chance em nove do ponto escolhido "cair" no buraco.

Após o trabalho com os alunos, o professor poderá ter mais facilidade para sistematizar o conceito de Probabilidade Geométrica. Observe que já estamos usando intuitivamente esse conceito quando dizemos uma "chance" em quatro ou uma "chance" em nove, ou seja, já estamos induzindo os alunos ao aparecimento de um quociente.

Segundo Wagner (1997), se tivermos uma região B do plano, contida em uma região A, admitimos que a probabilidade de um ponto de A também pertencer a B

é proporcional à área de B e não depende da posição que B ocupa em A. Portanto, selecionando ao acaso um ponto de A, a probabilidade p de que ele pertença a B será:

$$p = \frac{\text{área de } A}{\text{área de } B}$$

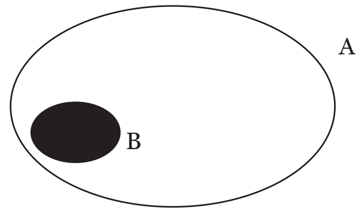

Figura 3 - Região B contida na região A.

Existem várias maneiras de se introduzir o conceito de Probabilidade Geométrica. Provavelmente, as mais utilizadas são a roleta circular (VAN DE WALLE, 2009, p. 510-512; JUNQUEIRA, CAMPOS e WATABE, 2011), o geoplano (SILVA, CAMPOS e ITACARAMBI, 2008; NEVES, CONTINI e MENDONÇA, 2011) e o uso de comprimentos de segmentos e áreas de figuras planas (WAGNER, 1997; PATERLINE, 2002).

Considerando que a Geometria Fractal é um conhecimento matemático relativamente novo e dificilmente inserido na Educação Básica, Weiss et. al. (2011) apontam a Geometria Fractal como alternativa para trabalhar com conceitos geométricos, como áreas e comprimentos, e também como um conteúdo que possibilita o desenvolvimento de um trabalho interdisciplinar com aplicações na Biologia, nas Artes e na Medicina.

Associamos, neste trabalho, o uso de fractais com o conceito de probabilidade na concepção geométrica. Desta forma, integramos um conteúdo relativamente novo – fractais – a um assunto cada vez mais presente no dia a dia de todo cidadão – a probabilidade. O uso da geometria fractal para o trabalho com o conceito de probabilidade geométrica ainda não foi considerado na literatura especializada.

Tomando-se por base a sistematização do conceito, outros problemas podem e devem ser considerados. Observe que, inicialmente, usamos o problema para a construção ou reconstrução do conceito matemático de probabilidade, ou seja, usamos o problema para ensinar Matemática. Agora, usaremos o conceito matemático para resolver os problemas. A palavra "probabilidade" aparecerá pela primeira vez no *Problema 3*, a seguir.

No *Problema 1,* demos o primeiro passo da construção do Triângulo de Sierpinski e, no *Problema 2*, o primeiro passo para a construção do Tapete de Sierpinski.

Segundo Edgar (2000), a construção do Triângulo de Sierpinski pode ser feita da seguinte forma: começamos com um triângulo equilátero de lado medindo 1 unidade; o triângulo e sua região interior será chamado de S_0. Esse triângulo será subdividido em 4 triângulos equiláteros menores de lados medindo 1/2 unidade, por meio dos pontos médios dos lados. A região a ser removida é o interior do triângulo central (seus lados e vértices permanecem). Após esta remoção, o conjunto remanescente é chamado de S_1, o qual é um subconjunto de S_0. Agora, cada um dos três triângulos restantes é dividido em triângulos ainda menores com lado medindo 1/4 unidade, e os três triângulos centrais são removidos. O resultado é S_2, um subconjunto de S_1.

Continuamos dessa forma, obtendo uma sequência S_k de conjuntos. O Triângulo de Sierpinski é definido como o limite S, desta sequência de conjuntos, quando $k \longrightarrow \infty$.

Problema 3. Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0 calcular a probabilidade de esse ponto pertencer a S_2?

Comentários e sugestões.

Neste caso, a construção geométrica ainda é simples e pode auxiliar na solução do problema. A Figura 4 representa o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski.

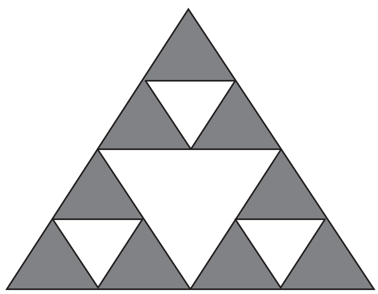

Figura 4 - Segundo passo do Triângulo de Sierpinski.

No início do segundo passo, cada um dos 3 triângulos equiláteros restantes será dividido em 4 novos triângulos equiláteros menores de mesma área; temos assim, 12 novos triângulos com medida de lado igual a $1/4 = 2^{-2}$. Como os triângulos interiores são removidos, restaram $9 = 3^2$ triângulos menores. Portanto, a probabilidade de escolhermos um ponto ao acaso e ele cair no triângulo de Sierpinski é

$$p = \frac{\text{área do Triângulo de Sierpinski}}{\text{área de } S_o} = \frac{3^2 . (2^{-2})^2 . \sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{9}{16}$$

Outra solução. Temos, neste caso, 12 triângulos equiláteros de mesma área, e 3 desses são buracos. Agora, como a área do triângulo que define o buraco do primeiro passo é 4 vezes a área de cada um desses novos triângulos, teremos um total de 16 triângulos equiláteros de mesma área. Portanto, $p = \frac{9}{16}$.

Problema 4. Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0 calcular a probabilidade de esse ponto pertencer a S_3?

Comentários e sugestões.

De modo análogo ao *Problema 3,* temos, neste caso, a probabilidade *p,* dada por:

$$p = \frac{\text{área do Triângulo de Sierpinski}}{\text{área de } S_o} = \frac{3^3 . (2^{-3})^{22} . \sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{27}{64} \cong 42{,}19\%$$

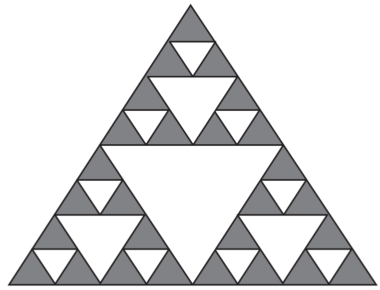

Figura 5 - Terceiro passo do Triângulo de Sierpinski.

A Figura 5 representa o terceiro passo da construção do Triângulo de Sierpinski.

Poderíamos continuar questionando se, ao escolhermos ao acaso um ponto de S_0, calcular a probabilidade desse ponto pertence a S_4, S_5, etc. e generalizar, de acordo com o *Problema 5* a seguir.

Problema 5. Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0 calcular a probabilidade de esse ponto pertencer a S_k quando $k \longrightarrow \infty$?

Comentários e sugestões.

Neste caso, os alunos deverão trabalhar com generalizações, não sendo mais possível o "apelo" geométrico. Cada conjunto S_k consiste de 3^k triângulos, com lado de medida 2^{-k}. Assim, a área total de S_k é $3^k(2^{-k})^2.\sqrt{\frac{3}{4}}$, que converge para 0, quando $k \longrightarrow \infty$. Portanto,

$$p = \frac{\text{área de } S^k\,(k \to \infty)}{\text{área de } S_0} = \frac{0}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = 0 \ \ (\textit{Evento Impossível}).$$

Da solução do *Problema 5,* observamos que a área total do Triângulo de Sierpinski é 0. Assim, escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0, a probabilidade desse ponto "cair" em um buraco, quando $k \longrightarrow \infty$, é $p = 1$, ou seja, o *Evento Certo.*

Para os problemas a seguir, no segundo passo do Triângulo de Sierpinski (Figura 4), vamos denominar o buraco maior, de área $(2^{-1})^2.\sqrt{\frac{3}{4}}$, por "*buraco central*", e cada um dos três buracos menores, de área $(2^{-2})^2.\sqrt{\frac{3}{4}}$, por "*buraco lateral*". Assim, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski, temos um buraco central e três buracos laterais, em que a área do buraco central é igual a quatro vezes a área de um buraco lateral.

Problema 6. Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0, calcular a probabilidade desse ponto "cair" em um buraco, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski?

Comentários e sugestões.

Da solução do *Problema 3* e observando-se que, o evento “cair” em um buraco, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski, corresponde ao evento complementar do evento “o ponto pertence a S_2”, então $p = 1 - \frac{9}{16} = \frac{7}{16}$.

Outra solução. Vamos definir os seguintes eventos:

A = {o ponto escolhido “caiu” no buraco central, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski};

B = {o ponto escolhido “caiu” em um buraco lateral, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski}.

Como estamos interessados em calcular a probabilidade do ponto “cair” em um buraco, isto significa que o ponto pode “cair” no buraco central **ou** “cair” em algum dos buracos laterais. Assim, necessitamos calcular $P(A \cup B)$. Neste caso,

$$P(A) = \frac{\textit{área de buraco central}}{\textit{área de } S_0} = \frac{(2^{-1})^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{4}{16}$$

$$P(B) = \frac{\textit{área dos buracos laterais}}{\textit{área de } S_0} = \frac{3(2^{-2})^2 \cdot \sqrt{\frac{3}{4}}}{\sqrt{\frac{3}{4}}} = \frac{3}{16}$$

Como os eventos A e B são mutuamente exclusivos, ou seja, A | B = , temos então que $P(A \cup B) = P(A) + P(B) = \frac{4}{16} + \frac{3}{16} + \frac{7}{16}$.

Para a primeira solução do *Problema 6,* utilizamos o conceito de *Evento Complementar* e para a segunda solução, o conceito presente na *União de dois Eventos*. (Observar o destaque dado ao “**ou**” na segunda solução).

Para o trabalho com os seis problemas anteriores, utilizamos o conceito de probabilidade geométrica na concepção clássica. Como já mencionado, e conforme o entendimento de alguns autores já citados, para a apreensão do conceito de probabilidade, outras concepções devem ser trabalhadas. Entendemos que no Ensino Médio, faz-se necessária também a apresentação da probabilidade frequentista.

Ferreira et al. (2010) apresentam três sequências de ensino para o trabalho do conceito da Probabilidade Geométrica associada à concepção frequentista. São essas: o problema do macarrão (WAGNER, 1997), o jogo dos discos (PATERLINI, 2002) e o problema da agulha de Buffon (TUNALA, 1992). Essas atividades apresentam também as probabilidades teóricas (clássicas) sem, no entanto, apresentarem a dedução matemática de como foram obtidas.

Definição de Probabilidade Condicional

Dentre os conceitos básicos de probabilidade, a condicional é a que acarreta maiores dificuldades de compreensão por parte dos alunos. Para o trabalho com esse conceito, Neves, Contini e Mendonça (2011) propõem três atividades usando o geoplano e o conceito de probabilidade geométrica.

Junqueira, Campos e Watabe (2011) propõem uma atividade para trabalhar com esse conceito. Utilizando uma roleta, as autoras formulam problemas que exploram o conceito de probabilidade condicional.

Para a sistematização do conceito de Probabilidade Condicional formulamos alguns problemas envolvendo o Triângulo de Sierpinski, cujas soluções podem levar os alunos a compreenderem o conceito, mesmo antes de sua formalização pelo professor.

O enfoque aqui utilizado segue os pressupostos de Van de Walle (2009, p. 509). Para ele, "como as ideias e métodos probabilísticos estão cada vez mais predominantes no mundo atual", a probabilidade "tem ampliado sua visibilidade e presença no currículo escolar" e, para o seu ensino, "a ênfase deve estar na exploração em vez de em regras ou definições formais".

Problema 7. Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0, calcular a probabilidade de esse ponto pertencer ao buraco central, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski, sabendo-se que o ponto "caiu" em um buraco.

Comentários e sugestões.

O professor deve explorar o fato que, neste caso, temos a informação que o ponto "caiu" em um buraco. Essa informação fornecida, a priori, reduz o Espaço Amostral. Para o *Problema 6*, o ponto escolhido poderia "cair" em qualquer um dos 16 triângulos equiláteros de mesma área, buraco ou não. Agora, ou o ponto "caiu" no buraco central ou em um dos buracos laterais, isto é, temos a possibilidade do ponto cair em um dos 7 triângulos equiláteros que formam os buracos, lembrando que a área do triângulo que forma o buraco central corresponde a quatro vezes a área de cada um dos triângulos que definem os buracos laterais.

Assim, temos 4 chances em 7 do ponto pertencer ao buraco central, sabendo-se que o ponto "caiu" em um buraco, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski. Portanto, neste caso, $p = \frac{4}{7}$.

Problema 8. Escolhendo-se ao acaso um ponto de S_0, calcular a probabilidade de esse ponto pertencer a um buraco lateral, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski, sabendo-se que o ponto "caiu" em um buraco.

Comentários e sugestões.

De forma análoga ao *Problema 7* temos, neste caso, que $p = \frac{3}{7}$.

Após o trabalho com problemas do tipo *7* e *8*, o professor poderá ter mais facilidade para sistematizar o conceito de Probabilidade Condicional.

Para o *Problema 7*, vamos definir os seguintes eventos:

A = {o ponto escolhido "caiu" no buraco central, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski};

B = {o ponto escolhido "caiu" em um buraco, após o segundo passo da construção do Triângulo de Sierpinski}.

Desejamos calcular a probabilidade de ocorrer o evento A, sabendo-se que o evento B já ocorreu. O cálculo dessa probabilidade envolve dois eventos. Assim, devemos utilizar uma notação que corresponda a essa finalidade. A notação comumente utilizada é P(A|B) (leia-se probabilidade de A dado B).

Considerando a solução do *Problema 6*, sabemos que $P(B) = \frac{7}{16}$ e, como A | B = A, então $P(A \mid B) = P(A) = \frac{4}{16}$.

Agora, da solução do *Problema 7*, já sabemos que $P(A \mid B) = \frac{4}{7}$.

Portanto,

$$P(A \mid B) = \frac{4}{7} = \frac{\frac{4}{16}}{\frac{7}{16}} = \frac{P(A \mid B)}{P(B)}$$

Assim, obtivemos a relação: $P(A \mid B) = \frac{P(A \mid B)}{P(B)}$ que não se verifica apenas para o caso particular do *Problema 7*. Na verdade, essa relação é a definição de Probabilidade Condicional (MORGADO et al., 2004).

O professor deve explorar o fato que as probabilidades P(A | B) e P(B) são calculadas considerando-se um Espaço Amostral composto de 16 triângulos, em que cada um deles possui área igual a $(2^{2})^{2}.\sqrt{\frac{3}{4}}$. Já a Probabilidade Condicional P(A|B) é calculada em um Espaço Amostral Reduzido composto de 7 triângulos de mesma área, igual a $(2^{-2})^{2}.\sqrt{\frac{3}{4}}$. A compreensão desse fato, pelos alunos, é fundamental para a apreensão do conceito de Probabilidade Condicional.

Após a sistematização do conceito, com a apresentação de sua definição e algumas propriedades básicas, pode-se então resolver outros problemas com o objetivo de aprofundar o aprendizado do conceito de Probabilidade Condicional. Neste momento, deve-se privilegiar a utilização do conceito estudado mediante o uso de suas fórmulas e propriedades, e do rigor característico da matemática.

Considerações finais

A proposta deste trabalho é apresentar uma alternativa para o ensino do conceito de Probabilidade Geométrica por meio da resolução de problemas, isto é, o problema é utilizado para se ensinar Matemática. Esse é o enfoque proposto pelos Parâmetros Curriculares Nacionais para o ensino dessa ciência.

O ensino de Probabilidade não deve ser concentrado em apenas uma de suas concepções. No Ensino Médio, pelo menos as concepções frequentista e clássica devem ser consideradas. A probabilidade geométrica, na forma aqui apresentada, pode colaborar com a apreensão desse conceito pelos alunos. Valendo-se da ideia apresentada, o professor poderá pensar e propor outros tipos de fractais, gerando figuras geométricas diferentes, para explorar tal conceito.

Como este tema é pouco considerado nos livros didáticos, acreditamos estar contribuindo com os professores que atuam nesse nível de escolaridade. Ao abordarmos os fractais, que é um tópico recente da Matemática, esperamos motivar os alunos para o estudo desse assunto, tornando-o atraente e facilitando o desenvolvimento do raciocínio lógico e as conexões com semelhança, divisões sucessivas, frações, áreas, porcentagens, funções, sucessões, progressões, limites, indução e generalização.

Referências

ABE, T. S.; BITTAR, M. O ensino de probabilidade nas visões clássica, frequentista e geométrica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010. 1 CD-ROM.

BATANERO, C. Razonamiento probabilístico em la vida cotidiana: um desafio educativo. In: FLORES, P.; LUPIÁÑEZ, J. (Orgs.). **Investigación em el aula de matemática**. Estadística y Azar. Granada: Sociedad de Educación Matemática Thales, 2006. 1 CD-ROM.

BARNSLEY, M. F. **Fractals everywhere**. San Diego: Academic Press, 1988.

COUTINHO, C. Q. S. Probabilidade geométrica: um contexto para a modelização e a simulação de situações aleatórias com Cabri. **Educação Matemática Pesquisa**. São Paulo, v. 7, n. 2, p. 185-199, 2005.

EDGAR, G. **Measure, topology and fractal geometry**. 2. ed. New York: Springer, 2000.

EISEN, M. **Introduction to mathematical probability theory**. New Jersey: Prentice-Hall, 1969.

FALCONER, K. J. **Fractal geometry: mathematical foundations and applications**. New York: John Wiles & Sons, 1990.

FERREIRA, R. S. et al. Atividades didáticas para o ensino de probabilidade geométrica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010. 1 CD-ROM.

GOMES. A. N.; SALVADOR, J. A.; PAEZ, G. R. Perspectivas para o uso de fractais em salas de aula da educação básica. In: ENCONTRO NACIONAL DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 10., 2010, Salvador. **Anais...** Salvador: SBEM, 2010. 1 CD-ROM.

JUNQUEIRA, A. L. N.; CAMPOS, M. L. T.; WATABE, L. Uma sequência de ensino em probabilidade geométrica: o jogo da roleta. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: CIAEM, 2011. 1 CD-ROM.

LIMA, E. L. **Exame de textos**: análise de livros de matemática para o ensino médio. Rio de Janeiro: SBM, 2001.

MANDELBROT, B. B. **The fractal geometry of nature**. New York: W. H. Freeman and Company, 1983.

MORGADO, A. C. O. et al. **Análise combinatória e probabilidade**. Rio de Janeiro: SBM, 2004. (Coleção do Professor de Matemática).

NEVES, E. P.; CONTINI NETO, F.; MENDONÇA W. Uma sequência de ensino probabilidade geométrica com o uso do geoplano. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: CIAEM, 2011. 1 CD-ROM.

PATERLINI, R. R. O problema do jogo dos discos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 48, p. 13-20, 2002.

PEITGEN, H. O; JÜRGENS, H; SAUPE, D. **Chaos and fractals**: new frontiers of sciences. New York: Springer-Verlag, 2004.

POLYA, G. **How to solve it**. New York: Princeton University Press, 1973.

SILVA, V. A.; DE CAMPOS, T. A.; ITACARAMBI, R. R. In: SEMINÁRIO DE HISTÓRIAS E INVESTIGAÇÕES DE/EM AULAS DE MATEMÁTICA, 2.,2008, Campinas. **Anais...** Campinas: Gds/Prapem, 2008. 1 CD-ROM.

TODHUNTER, I. **A history of the mathematical theory of probability from the time of Pascal to that of Laplace**. London: Macmillan, 1865.

TUNALA, N. Determinação de probabilidades por métodos geométricos. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 20, p. 16-22, 1992.

VAN de WALLE, J. A. **Matemática no ensino fundamental** – formação de professores e aplicação em sala de aula. Porto Alegre: Artmed, 2009.

WAGNER, E. O problema do macarrão e um paradoxo famoso. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, v. 34, p. 28-35, 1997.

WEISS, K. L. et al. Geometria fractal: uma abordagem atualizada e interdisciplinar da matemática no ensino médio. In: CONFERÊNCIA INTERAMERICANA DE EDUCAÇÃO MATEMÁTICA, 13., 2011, Recife. **Anais...** Recife: CIAEM, 2011. 1 CD-ROM.

Recebido em 29/08/2012. Aprovado, para publicação, em 22/01/2013