



## ESTUDO DE CASO: COMO DUAS CRIANÇAS PASSAM A COMPREENDER A COMBINATÓRIA A PARTIR DE INTERVENÇÕES?

**Cristiane Azevêdo dos Santos Pessoa<sup>1</sup>**  
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE

**Lais Thalita Bezerra dos Santos<sup>2</sup>**  
Universidade Federal de Pernambuco, UFPE

### Resumo

No presente estudo de caso foram analisados os desempenhos de dois alunos do 5º ano do Ensino Fundamental ao trabalharem com problemas combinatórios. Foram realizados pré-teste, duas sessões de intervenção e pós-teste com a turma inteira, porém, para a análise atual foi feito o recorte dos desempenhos de Lucas e Marcos<sup>3</sup>, buscando-se analisar de forma detalhada como essas duas crianças passaram a compreender os quatro tipos de problemas combinatórios (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação). Observaram-se as contribuições das intervenções, as quais foram baseadas na *listagem de possibilidades* como estratégia e em mais três pilares considerados importantes para a compreensão da combinatória: o destaque para os *invariantes* dos problemas combinatórios, a *sistematização* das possibilidades e a *generalização*. A estratégia da *listagem* foi observada como importante para o ensino, após ter sido detectada em estudos de sondagem anteriores como caminho utilizado por alunos de diferentes níveis escolares. Os demais pilares (*invariantes*, *sistematização* e *generalização*), apesar de aparecerem com menor frequência nos estudos de sondagem, são entendidos como facilitadores da compreensão combinatória, por isso o destaque para os mesmos durante as intervenções. Os dois alunos investigados demonstraram melhor desempenho em termos quantitativos e qualitativos, com maior quantidade de acertos e melhor compreensão dos problemas após as intervenções. Eles passaram a se utilizar dos pilares trabalhados nas intervenções, o que demonstra que o caminho escolhido para o trabalho com a combinatória foi significativo para a aprendizagem.

---

<sup>1</sup> Professora Adjunto do Departamento de Métodos e Técnicas de Ensino (DMTE) e da Pós-Graduação em Educação Matemática e Tecnológica (EDUMATEC), Pesquisadora do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (GERAÇÃO) do Centro de Educação da Universidade Federal de Pernambuco. cristianepessoa74@gmail.com

<sup>2</sup> Graduanda do 7º período do curso de Pedagogia, aluna do Projeto Institucional de Bolsas de Iniciação Científica (PIBIC) e membro do Grupo de Estudos em Raciocínio Combinatório (GERAÇÃO) do Centro de Educação da Universidade federal de Pernambuco. laisthalita@hotmail.com

<sup>3</sup> Os nomes Lucas e Marcos são fictícios, colocados para preservar a identidade dos alunos.



**Palavras-chave:** Raciocínio combinatório; Intervenções; Tipos de problemas combinatórios; Educação básica.

Agências financiadoras: CNPq e FACEPE

## **CASE STUDY: HOW DO TWO CHILDREN START TO UNDERSTAND THE COMBINATORICS FROM INTERVENTIONS?**

### **Abstract**

In this case study we analyzed the performance of two students in the 5th year of elementary school by working with combinatorial problems. A pre-test, two intervention sessions and a post-test with the whole class were performed, but for the present analysis only the performances of Lucas and Marcos were taken into consideration, trying to analyze in detail how these two children have come to understand the four types of combinatorial problems (Cartesian Product, Arrangement, Permutation and Combination). We observed the contributions of the interventions, which were based on the list of possibilities as a strategy and on three pillars that are important for understanding the combinatorics: the emphasis on the invariants of combinatorial problems, the systematization and generalization of the possibilities. The listing strategy was seen as important for teaching, after it had been detected in previous studies as a way of probing used by students in different grade levels. Although the other pillars (invariants, systematization and generalization) appear less frequently in probing studies, they are known as facilitators of the combinatorics comprehension, so they were highlighted during procedures. The two investigated students showed a better performance on quantitative and qualitative terms, with a higher level of correct answers and better understanding of problems after the interventions. They started using the pillars worked in the interventions, which shows that the path chosen to work with the combinatorics was significant for learning.

**Key words:** Combinatorial Reasoning; Interventions; Types of Combinatorial Problems; Basic Education.

## **ESTUDO DE CASO: COMO DUAS CRIANÇAS PASSAM A COMPREENDER A COMBINATÓRIA A PARTIR DE INTERVENÇÕES?**

### **Introdução**

Hipóteses levantadas por alunos de diferentes anos escolares para resolverem situações-problema, assim como a explicitação dessas hipóteses através de suas estratégias, devem ser vistas pela escola como uma oportunidade de perceber como os alunos pensam sobre determinados conceitos e utilizá-las pode ser uma boa alternativa para o ensino.

Estudo desenvolvido por Pessoa e Borba (2009a) apresenta como



um dos seus resultados as estratégias desenvolvidas por 568 alunos do 2º. ano do Ensino Fundamental ao 3º. ano do Ensino Médio ao resolverem problemas de combinatória (Arranjo, Combinação, Permutação e Produto Cartesiano). Estas estratégias eram, por vezes, bem sucedidas em encontrar soluções corretas e, em outras ocasiões, iniciavam-se corretamente, mas não eram totalmente bem sucedidas em se chegar ao resultado final correto. Um estudo desenvolvido por Pessoa e Santos (2011) encontrou estratégias de alunos ao resolverem problemas combinatórios. Neste estudo as autoras levantaram, além das estratégias, as explicações dos alunos pesquisados sobre o entendimento que os mesmos tiveram no que se refere a cada problema combinatório, sendo possível verificar quais as dificuldades/facilidades dos alunos em relação aos *invariantes* de cada situação.

No presente estudo objetiva-se utilizar a estratégia que mais se destacou em todos os estudos analisados, que foi a *listagem de possibilidades*, juntamente com três outros pilares considerados fundamentais para a aprendizagem da combinatória, que são o destaque para os *invariantes*<sup>4</sup> de cada tipo de problema combinatório, a *sistematização* e a *generalização*. Tais pilares foram tomados como ponto de partida para a elaboração e execução de intervenções que possam auxiliar no ensino-aprendizagem da combinatória com alunos do 5º ano do Ensino Fundamental, a fim de analisar os esperados avanços e as contribuições de tais intervenções no que se refere à compreensão da combinatória.

## A Combinatória

Pessoa e Borba (2009b) classificam os problemas que envolvem o raciocínio combinatório em uma organização única – não identificada em estudos anteriores. A seguir estão colocados os tipos de problemas, ou seja, significados presentes na combinatória (Produto Cartesiano, Arranjo, Permutação e Combinação) e seus respectivos *invariantes do conceito*, ou seja, relações e propriedades que se mantêm constantes:

**Produto Cartesiano** (1) Dados dois (*ou mais*) conjuntos distintos, os mesmos serão combinados para formar um novo conjunto e a natureza dos conjuntos é distinta do novo conjunto formado (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. O que caracteriza estes problemas é que dois ou mais conjuntos distintos são combinados para formarem um terceiro conjunto.

**Permutação** (1) Todos os elementos do conjunto serão usados, cada um apenas uma vez (especificamente para os casos sem repetição); (2) A ordem dos

---

<sup>4</sup> Para Vergnaud (1990), os *invariantes* são importantes componentes de um conceito, junto com os *significados* e as *representações simbólicas*. Para o presente estudo, os invariantes do conceito dos problemas combinatórios se relacionam com a *escolha*, ou seja, a utilização ou não de todos os elementos da situação-problema e com a *ordenação*, ou seja, a geração ou não de novas possibilidades, dependendo do tipo do problema.



elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que todos os elementos são usados em diferentes ordens para formar as Permutações.

**Arranjo** (1) Tendo  $n$  elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos....  $p$  elementos, com  $0 < p < n$ , sendo  $p$  e  $n$  números naturais; (2) A ordem dos elementos gera novas possibilidades. O que caracteriza esses problemas é que de um grupo maior, alguns subgrupos são organizados e a ordem dos elementos gera novas possibilidades, sendo importante na composição das possibilidades.

**Combinação** (1) Tendo  $n$  elementos, poderão ser formados agrupamentos ordenados de 1 elemento, 2 elementos, 3 elementos....  $p$  elementos, com  $0 < p < n$ ,  $p$  e  $n$  naturais; (2) A ordem dos elementos não gera novas possibilidades. De forma semelhante aos problemas de Arranjo, tem-se um conjunto maior e dele são selecionados elementos para formar subconjuntos, porém, de forma diferente, a ordem dos elementos não gera novas possibilidades.

Apesar da importância de estudos que envolvam o raciocínio combinatório, poucas são as pesquisas que objetivam investigá-lo propondo intervenções de ensino envolvendo uma amplitude de situações combinatórias, como as que envolvem os Arranjos, as Combinações, as Permutações e os Produtos Cartesianos. Como exemplos de estudos anteriores relacionados à Combinatória, que trabalharam com intervenções envolvendo os quatro tipos de problemas, Azevedo, Costa e Borba (2011), em um estudo com o *software* *Árbol*, trabalharam os quatro tipos de problemas com 16 crianças do 5º ano do Ensino Fundamental e perceberam progressos na compreensão da combinatória na comparação entre o pré-teste e o pós-teste de tais alunos. Outro estudo que trabalhou com intervenção, foi o de Barreto e Borba (2011), que investigou o uso de estratégias específicas (listagem e árvore de possibilidades) com alunos da Educação de Jovens e Adultos. Tanto os alunos que trabalharam com listagem, quanto os que trabalharam com a árvore de possibilidades apresentaram importantes avanços.

Já no que se refere aos estudos que investigaram tipos específicos de problemas, Inhelder e Piaget (1955) estudaram a resolução de problemas do tipo Permutação por parte de crianças com idade em torno de 12 anos; Soares e Moro (2006) investigaram a resolução de problemas de Produto Cartesiano por crianças de 5ª e 6ª série (atuais 6º e 7º anos de escolarização); Schliemann (1988), numa investigação com adultos escolarizados e com pouca escolarização, trabalhou com problemas de tipo Permutação; e Miguel e Magina (2003) investigaram com alunos do 1º ano de Licenciatura em Matemática as estratégias de resolução de Permutações simples e com repetição, Arranjos simples e com repetição e Combinações.

Os Parâmetros Curriculares Nacionais – PCN – (BRASIL, 1997) apontam a necessidade de que a combinatória seja trabalhada desde os anos iniciais da escolaridade, entretanto, apesar dessa recomendação, na prática de



sala de aula, a maioria dos problemas de raciocínio combinatório (Arranjo, Combinação e Permutação) só é introduzida formalmente na escola a partir do 2º ano do Ensino Médio. Apenas o do tipo Produto Cartesiano é trabalhado explicitamente nos anos iniciais do Ensino Fundamental. Ainda assim, estudos como o de Pessoa e Borba (2009a, 2009b) mostram que é possível desenvolver compreensões sobre estes tipos de problemas antes de sua introdução formal na escola e que os alunos são capazes de desenvolver estratégias para resolver problemas combinatórios dos diferentes tipos.

Em relação à resolução de problemas, pode-se pensar nestas como situações que geram conflito e cujas soluções não são óbvias, ou seja, quando um aluno recorre ao conjunto de respostas imediatamente disponível e não obtém sucesso na solução, está frente a um problema. Deve, então, criar uma saída própria. A escolha pode ser por um procedimento mais formal, como as regras e algoritmos que seguem sempre a mesma ordem de passos de solução ou uma heurística que é menos formal, no sentido de ser adequada a cada situação.

Apesar de um elevado número de estudos sobre combinatória, justifica-se a realização de pesquisas, como a atual, que, a partir dos dados obtidos em estudos de sondagem (PESSOA; BORBA, 2009a, 2009b; PESSOA; SANTOS, 2011) investiguem mais aprofundadamente o raciocínio combinatório, explorando todos os tipos de problemas e desenvolvendo intervenções que possibilitem uma compreensão mais ampla da combinatória.

## Método e Objetivos

A presente análise trata-se do recorte de um estudo maior intitulado *Listagem, invariantes, sistematização e generalização: um caminho para o ensino de combinatória em uma turma do 5º ano do Ensino Fundamental*, que foi realizado com alunos do 5º ano do Ensino fundamental, havendo aplicação de pré-teste, elaboração e execução de duas sessões de intervenção, que envolveram os quatro tipos de problemas combinatórios e aplicação de pós-teste, de modo a verificar os possíveis avanços.

Acreditando que o uso da *listagem* como estratégia, o destaque para os *invariantes* de cada tipo de problema combinatório, a *sistematização* e a *generalização* facilitam a compreensão da combinatória, foi essa a forma de intervenção adotada para ser trabalhada com os alunos de uma turma do 5º ano escolar, sendo os dois alunos do presente estudo, Lucas e Marcos, integrantes desta sala. Trabalharam-se os quatro tipos de problemas combinatórios estando esses divididos em duas sessões, as quais tiveram, cada uma, duração de, em média, uma hora e trinta minutos, a depender do avanço e entendimento da turma, e foram organizadas como segue:

Na primeira sessão de intervenção foram trabalhados com os alunos seis problemas, sendo os três primeiros de Produto Cartesiano e os três últimos de Permutação. Assim como no primeiro momento, na segunda sessão de intervenção foram trabalhados seis problemas, sendo os três primeiros do tipo Combinação e os três últimos do tipo Arranjo. Nas duas intervenções, o

primeiro problema de cada um dos tipos resultava em um número menor de possibilidades (grandeza numérica até 10) e o segundo e o terceiro problema, levavam a um número maior de possibilidades (grandeza numérica até 30).

A organização das intervenções pode ser visualizada no Quadro 1 que segue.

#### Quadro 1: Organização das Intervenções

INTERVENÇÃO	1º Prob. (NP) <sup>5</sup>	2º Prob. (NG)	3º Prob. (NG)	4º Prob. (NP)	5º Prob. (NG)	6º Prob. (NG)
1ª sessão	PC	PC	PC	Perm.	Perm.	Perm.
2ª sessão	Comb.	Comb.	Comb.	Arranjo	Arranjo	Arranjo

Em ambas as sessões de intervenção, foram resolvidos os problemas do pré-teste (na organização do teste, os 1º, 2º, 4º e 5º problemas), de modo que fosse possível tirar dúvidas das crianças e destacar os *invariantes* de cada tipo de problema combinatório que elas já haviam resolvido anteriormente (no momento da aplicação do pré-teste). Além disso, foi apresentada, de cada um dos problemas combinatórios, uma situação-problema ainda não conhecida pelas crianças (3º e 6º problemas), de modo que fosse possível perceber se elas estavam compreendendo o que estava sendo trabalhado. O objetivo era o de que as crianças, após trabalharem os problemas já resolvidos por elas (no pré-teste) e de terem certo entendimento sobre os *invariantes*, tentassem resolver sozinhas outros problemas do mesmo tipo combinatório (por isso a presença do 3º e 6º problemas).

Os problemas trabalhados no pré-teste, nas sessões de intervenção e no pós-teste foram os seguintes:

#### Pré-teste:

- 1) Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?
- 2) Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?
- 3) Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Laís, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?
- 4) Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?
- 5) Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?

<sup>5</sup> NP = números pequenos (problemas que resultavam em um número menor de possibilidades); NG = números grandes (problemas que resultavam em um número maior de possibilidades); PC = Produto Cartesiano; Perm. = Permutação; Comb. = Combinação.



6)A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?

7)Para a festa de aniversário de Amanda poderão ser convidados cinco amigos entre os sete (Lívia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantos grupos diferentes de cinco amigos Camila poderá formar para ir à sua festa?

8)Elizabete quer criar uma senha para que outras pessoas não mexam no seu celular. Sabendo que ela só pode usar os números 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los na mesma senha, de quantas maneiras diferentes Elizabete poderá criar essa senha?

### **1ª Intervenção:**

1) Resolução e discussão - 1º problema do pré-teste (ver pré-teste)

2) Resolução e discussão - 5º problema do pré-teste (ver pré-teste)

3) Novo problema apresentado: A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?

4) Resolução e discussão - 4º problema do pré-teste (ver pré-teste)

5) Resolução e discussão - 8º problema do pré-teste (ver pré-teste)

6) Novo problema apresentado: Mayara foi à sorveteria e pediu um sorvete com quatro bolas: morango, chocolate e flocos e baunilha. Se forem colocadas uma em cima da outra, de quantas maneiras diferentes as bolas de sorvete podem ser colocadas na casquinha?

### **2ª Intervenção:**

1) Resolução e discussão – 3º problema do pré-teste (ver pré-teste)

2) Resolução e discussão – 7º problema do pré-teste (ver pré-teste)

3) Novo problema apresentado: Para brincar no pula pula do parque, podem entrar duas crianças de cada vez. Amanda, Lívia, Gisele, Joaquim, Lorena, Marcos, Pedro e Fabiana estão aguardando para brincar. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas as duplas para entrar no pula pula?

4) Resolução e discussão – 2º problema do pré-teste (ver pré-teste)

5) Resolução e discussão – 6º problema do pré-teste (ver pré-teste)

6) Novo problema apresentado: Jane, Neide, Vanessa e Paula estão disputando uma corrida. De quantas maneiras diferentes poderemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada na disputa?

### **Pós-teste:**

1)Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?

2)Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?

3)Uma lanchonete tem à disposição cinco variedades de frutas (morango, laranja, pêra, banana e graviola) e pretende misturá-las duas a duas na fabricação de sucos. Quantos serão os tipos de sucos disponíveis?

4)Maurício, Tânia e André formam a comissão de eventos da escola. Eles precisam escolher entre eles um presidente e um vice. De quantas formas diferentes poderemos ter essa escolha?



- 5) Uma padaria prepara bolos deliciosos. Os bolos podem ser de três tamanhos (pequeno, médio e grande) e os sabores podem ser de oito tipos diferentes (morango, chocolate, brigadeiro, coco, doce de leite, mandioca, laranja e banana). Quantos tipos diferentes de bolo você pode escolher para comprar, combinando cada tamanho com cada sabor?
- 6) Sem repetir as letras na mesma palavra, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) podemos formar com as letras da palavra GATO?
- 7) A Professora do 4<sup>a</sup> ano elaborou uma prova com seis questões (A, B, C, D, E, F), das quais os alunos deveriam resolver apenas três. De quantas formas eles poderão escolher as três questões?
- 8) Em um concurso de beleza organizado pelo bairro, quatro meninas (Bruna, Roberta, Helena e Bianca) são as finalistas. De quantas maneiras distintas podemos ter a primeira, a segunda e a terceira colocada?

Trabalhou-se da seguinte forma: foi resolvido com as crianças (no quadro-negro) o primeiro problema, havendo destaque para os *invariantes* do mesmo. Após esse momento, pediu-se que elas respondessem, individualmente, ao segundo problema. Dado o tempo para que as crianças respondessem, foi feita a resolução também no quadro, estimulando sempre a participação da turma. O processo foi repetido durante a resolução do terceiro problema. Primeiro as crianças responderam de modo mais individual e depois ocorreu a resolução em conjunto, no quadro. Tal modo de intervenção ocorreu de forma similar com cada um dos tipos de problemas combinatórios.

Destaca-se, a princípio, que a *listagem das possibilidades* foi a primeira orientação e a estratégia estimulada e trabalhada na resolução de todos os problemas usados nas intervenções. Foi destacada também, durante a resolução de todos os tipos de problemas, a *sistematização*, um dos pilares adotados, sendo trabalhado da seguinte forma: sempre que se iniciava a resolução de um problema no quadro, era dada a sugestão de que tal escrita fosse feita de forma organizada. Para a “organização”, sugeriu-se a *sistematização*, de modo que a ordem na qual os elementos aparecessem no enunciado fosse o ponto de partida no momento de escrever as possibilidades, o que tornava a resolução mais fácil, visto que a probabilidade de confundir os elementos seria menor.

A seguir é possível visualizar o que se destacou nas intervenções. Para tal caracterização, será tomado como exemplo uma das situações-problema para cada tipo de problema combinatório:

**1<sup>a</sup> Intervenção:** Produto cartesiano - Problema: *A mãe de Pedrinho fez oito tipos de suco (maracujá, laranja, acerola, goiaba, uva, manga, abacaxi e caju) para a comemoração do dia das crianças na escola do seu filho. Ela levou copos descartáveis de quatro cores (amarelo, branco, cinza e preto). Quantas combinações diferentes poderão ser formadas, combinando todos os sucos com todos os copos?*

Focou-se nos *invariantes*, destacando o fato de que existiam dois grupos (sucos – oito tipos, e copos – quatro cores) e que para formar as combinações possíveis, seria necessário retirar um elemento de cada grupo, formando assim um terceiro conjunto. Além disso, questionou-se as crianças





sobre a ordem exercer ou não influência, levando-as a refletir sobre o fato de que, nesse tipo de problema, formadas as combinações, a ordem não gera novas possibilidades. Utilizou-se a exemplificação de uma primeira combinação: dizer que temos a combinação suco de maracujá e copo amarelo é o mesmo que dizer que temos a combinação copo amarelo e suco de maracujá. A ordem na qual os elementos estão dispostos não exerce influência na resolução desse tipo de problema combinatório.

Para destacar a *generalização*, chamou-se atenção para o fato de que se para cada tipo de suco disponível havia a possibilidade de combinação com quatro cores diferentes de copos, e que existiam 8 tipos de sucos, a multiplicação  $4 \times 8$  responderia ao problema.

**Permutação** - Problema: *Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?*

Escrevendo os nomes “pai”, “mãe” e “irmão” no quadro, foi perguntado às crianças quais arrumações eram possíveis. Sempre partindo do uso da *listagem de possibilidades* como estratégia, supondo-se que estavam no quadro as seguintes possibilidades: “pai, mãe e irmão; mãe, pai e irmão; irmão, mãe e pai”, perguntava-se: “Mas só tem essas possibilidades? O porta-retrato do pai só pode vir em primeiro lugar uma vez, que é acompanhado da mãe e do irmão?”, “Será que não tem outras formas de organizar?” Essas questões, de certa forma, enfatizam um dos *invariantes* da Permutação, segundo o qual a ordem dos elementos gera novas possibilidades.

Quando já haviam sido escritas todas as possibilidades, era feita a *generalização*, junto com eles. “Quantas possibilidades nós temos nas quais aparecem o pai em primeiro lugar?” Feita a contagem, eles diziam: “duas”. A pergunta era repetida com a mãe e o irmão, levando-os a perceber que para cada elemento, havia duas possibilidades de organização. Assim, a multiplicação  $2 \times 3$  também resolvia ao problema, sem que fosse necessário escrever todas as possibilidades.

**2ª Intervenção: Combinação** – Problema: *Para brincar no pula pula do parque, podem entrar duas crianças de cada vez. Amanda, Lívia, Gisele, Joaquim, Lorena, Marcos, Pedro e Fabiana estão aguardando para brincar. De quantas maneiras diferentes podem ser formadas as duplas para entrar no pula pula?*

Para destacar os *invariantes*, foi dada ênfase ao fato de que o problema enumerava vários elementos, mas que nem todos seriam utilizados, de uma só vez, na formação das possibilidades. Além disso, as crianças foram levadas a refletirem sobre a importância ou não da ordem, com perguntas como: “Dizer que “Amanda e Lívia é a dupla que vai entrar no pula-pula” ou “Dizer que Lívia e Amanda é a dupla que vai entrar no pula-pula”, vai fazer diferença?” Com tal pergunta, o objetivo era o de chamar a atenção para o fato



de que, nesse tipo de problema, a ordem não exerce influência durante a formação das possibilidades.

Arranjo – problema: *Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?*

Visando à percepção dos *invariantes*, chamou-se a atenção para o fato de que nesse tipo de problema é fornecido um grupo e desse grupo são retirados elementos para formar subgrupos. Perguntou-se também se as combinações “Joana e Vitória” e “Vitória e Joana” eram diferentes.

Sobre a *generalização*, ainda tomando como exemplo o problema acima colocado, as crianças eram levadas a perceber quantas vezes cada um dos elementos (acompanhados dos vices), poderiam ser colocados em primeiro lugar (como prefeitos, no caso). Assim, chegando-se a conclusão de que cada um deles poderia ocupar o primeiro lugar, com segundos lugares (vices) diferentes, por duas vezes, e que a quantidade de elementos era de três, uma possível solução para o problema seria a multiplicação  $2 \times 3$ , que resulta na resposta seis possibilidades.

Assim, com o intuito de investigar de forma mais detalhada e aprofundar os resultados obtidos em estudo anterior, há o foco na análise de dois alunos que participaram do pré-teste, dos dois momentos de intervenção e do pós-teste, sendo estes escolhidos a partir dos avanços observados e das formas de resolução utilizadas, tomado como critério de escolha os progressos entre pré-teste e pós-teste aplicados. Os alunos são Lucas e Marcos, com 10 e 11 anos, respectivamente, que faziam parte de uma escola da rede municipal de ensino do Recife, cursando o 5º ano do Ensino Fundamental.

Os objetivos são os de analisar os avanços quantitativos e qualitativos desses alunos, entre pré-teste e pós-teste e as contribuições das intervenções para o entendimento da combinatória por eles.

## **Análise dos Resultados**

A fim de melhor compreender os avanços que ocorreram com as duas crianças analisadas, coloca-se, abaixo, o Quadro 2, que permite visualizar e comparar os acertos totais de ambos os alunos, de modo que, adiante, seja possível uma análise mais detalhada, verificando de que forma os alunos passaram a utilizar, em suas resoluções, os pilares adotados durante as sessões de intervenção.

## Quadro 2: Comparação entre os acertos dos alunos no Pré-teste e Pós-teste

		Tipos de Problemas <sup>6</sup>							
		PC-	PC+	Arr-	Arr+	Comb-	Comb+	Perm-	Perm+
Lucas	Pré-teste	E <sup>7</sup>	E	E	E	E	E	E	E
	Pós-teste	A <sup>8</sup>	A	A	A	A	E	A	E
Marcos	Pré-teste	A	E	E	E	E	E	E	E
	Pós-teste	A	A	A	E	E	A	A	E

Analisando quantitativamente, pode-se perceber que as crianças apresentaram aumentos importantes no que se refere à quantidade de questões acertadas. Além disso, observa-se a diversidade de tipos de problemas combinatórios nos quais passam a haver acertos, após os momentos de intervenção.

No pré-teste, Lucas não apresentou acertos totais em nenhum tipo de problema combinatório. Após as intervenções, no pós-teste, o aluno apresenta seis resoluções corretas, não apresentando êxito apenas nas questões do tipo Combinação e Permutação, ambas envolvendo um número maior de possibilidades. Já o aluno Marcos, que no pré-teste apresentou acerto total apenas no problema do tipo Produto Cartesiano com número menor de possibilidades, passa a resolver, no pós-teste, cinco problemas de forma correta, sendo eles os de Produto Cartesiano com número menor e maior de possibilidades, Arranjo e Permutação, ambos com número menor de possibilidades e Combinação com número maior de possibilidades.

Desse modo, no estudo atual, após o levantamento dos acertos dos alunos e da percepção de que eles avançaram, pretende-se aprofundar tais análises e investigar as possíveis contribuições dos pilares (*listagem, destaque para os invariantes, sistematização e generalização*) trabalhados em sala de aula para que os alunos tenham avançado em suas compreensões.

Para tal, apresenta-se abaixo, de acordo com cada tipo de problema combinatório, as comparações entre as resoluções apresentadas pelos alunos Lucas e Marcos, no pré-teste e pós-teste, de modo que seja possível discutir e melhor analisar a compreensão combinatória dos mesmos.

<sup>6</sup> PC- = Produto Cartesiano com número menor de possibilidades; PC+ = Produto Cartesiano com número maior de possibilidades; Arr- = Arranjo com número menor de possibilidades; Arr+ = Arranjo com número maior de possibilidades; Comb- = Combinação com número menor de possibilidades; Comb+ = Combinação com número maior de possibilidades; Per- = Permutação com número menor de possibilidades; Perm+ = Permutação com número maior de possibilidades.

<sup>7</sup> E = Erro.

<sup>8</sup> A = Acerto Total, ou seja, quando o aluno chegou à resposta numérica esperada para o problema.

## Produto Cartesiano:

Os alunos Lucas e Marcos fazem a utilização, no pré-teste (Figura 1 e Figura 2), da escrita de uma resposta, sem a utilização, sequer, dos elementos fornecidos pelo problema.

<p>Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?</p> <p><i>2 Pares</i></p>	<p>Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?</p> <p><i>JUNTANDO 4 BLUSAS E 4 SHORTS</i></p>
--	--

Figura 1: Resolução dos problemas de Produto Cartesiano com número menor e maior de possibilidades por Lucas, no pré-teste.

<p>Para a festa de São João da escola temos 2 meninos (Pedro e João) e 3 meninas (Maria, Luíza e Beatriz) que querem dançar quadrilha. Quantos pares diferentes podemos formar, se todos os meninos dançarem com todas as meninas?</p> <p><i>6 Pares diferentes</i></p>
---

Figura 2: Resolução do problema de Produto Cartesiano com número menor de possibilidades, por Marcos, no pré-teste.

É possível inferir, na resolução de Lucas, a relação um a um, tendo em vista que, por exemplo, no problema que envolvia um número menor de possibilidades, ele escreve como resposta a sentença “2 pares” e havia disponíveis no problema dois meninos para a formação das possibilidades. Possivelmente tal criança tinha a percepção de que havendo disponíveis dois meninos para a formação dos casais para a dança, seria possível a formação de dois pares, não podendo o mesmo menino dançar com meninas diferentes.

Analisando o aluno Marcos, é importante destacar que ele foi o que acertou, no pré-teste, o problema de Produto Cartesiano com número menor de possibilidades. Tal acerto foi contabilizado devido ao fato de que o aluno escreveu como resposta a sentença “6 pares diferentes” (Figura 2). Ainda assim, analisando qualitativamente, não se pode afirmar que ele, ao escrever tal resposta, tenha tido a compreensão combinatória de que cada um dos meninos poderá dançar com as três meninas que o problema cita, uma vez que tal percepção não foi explicitada.

Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?

$$\begin{array}{l}
 VE \text{ e } AM \quad | \quad AZ \text{ e } AM \quad | \quad P \text{ e } VE \quad | \quad M \text{ e } AM \\
 VE \text{ e } VE \quad | \quad AZ \text{ e } VE \quad | \quad P \text{ e } AM \quad | \quad M \text{ e } VE \\
 2 \quad + \quad 2 \quad + \quad 2 \quad + \quad 2 \quad = \quad 8 \text{ POSSIBILIDADE}
 \end{array}$$

Figura 3: Resolução do problema de Produto Cartesiano com número menor de possibilidades pelo aluno Lucas, no pós-teste.

Juliana é jogadora de tênis e tem quatro raquetes (vermelha, azul, preta e marrom) e duas bolinhas (amarela e verde) para jogar no torneio. Quantas combinações diferentes ela pode formar, combinando todas as raquetes com todas as bolinhas?

*vermelha e amarela*    *azul e amarela*    *preta e amarela*    *marrom e amarela*  
*vermelha e verde*    *azul e verde*    *preta e verde*    *marrom e verde*

*8 Combinações diferentes*

Figura 4: Resolução do problema de Produto Cartesiano com número menor de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pós-teste.

Na Figura 3, pode-se perceber que o aluno Lucas combina todas as raquetes de cor vermelha com todas as bolinhas disponíveis, em seguida todas as raquetes de cor azul também com as bolinhas disponíveis e assim sucessivamente, o que possibilita o término correto do problema. Na Figura 4, Marcos responde: “vermelha e amarela; vermelha e verde; azul e amarela; azul e verde; preta e amarela; preta e verde; marrom e amarela; marrom e verde”, demonstrando uma *sistematização* e uma *listagem* de possibilidades, utilizando os elementos fornecidos pelo enunciado, que não tinha feito no pré-teste nesse mesmo tipo de problema (ver Figura 2).

Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts? *6 blusas diferentes*

Figura 5: Resolução do problema de Produto Cartesiano com número maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pré-teste.

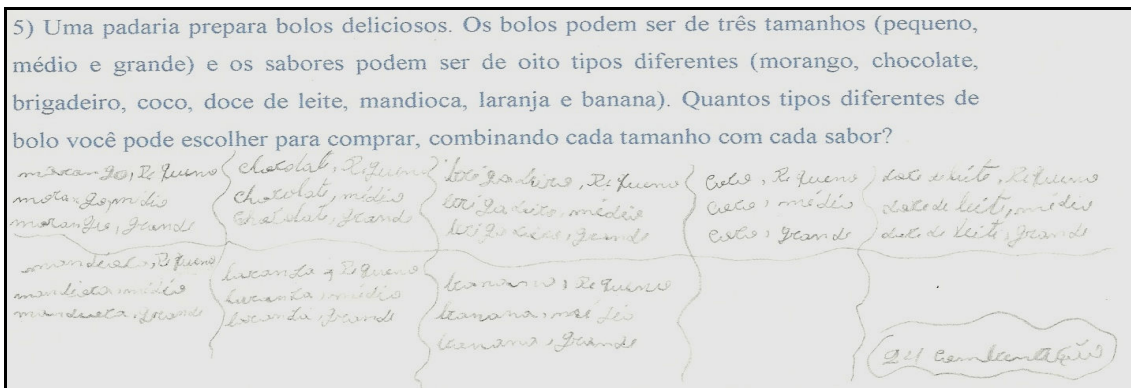


Figura 6: Resolução do problema de Produto Cartesiano com número maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pós-teste.

Com a apresentação da resolução do mesmo tipo de problema (Produto Cartesiano) no pós-teste (Figura 3 e Figura 4) e comparação entre resoluções no pré-teste e pós-teste (Figura 5: “6 formas diferentes”; e Figura 6: “morango, pequeno; morango, médio; morango, grande; mandioca, pequeno; mandioca, médio; mandioca, grande; chocolate, pequeno; chocolate, médio; chocolate, grande; laranja, pequeno; laranja, médio; laranja, grande; brigadeiro, pequeno; brigadeiro, médio; brigadeiro, grande; banana, pequeno; banana, médio; banana, grande; coco, pequeno; coco, médio; coco, grande; doce de leite, pequeno; doce de leite, médio; doce de leite, grande = 24 combinações”), é possível perceber significativa diferença na forma de resolução das crianças. Elas passam a utilizar os elementos fornecidos pelo problema, escrevendo os mesmos através da *listagem das possibilidades*. Além disso, demonstram *sistematizar* seus procedimentos de resolução.

Na resolução deste tipo de problema (Produto Cartesiano), com número maior de possibilidades, o aluno Lucas fez uso, ainda, do 4º pilar adotado durante as intervenções, a *generalização*, como segue na Figura 7:

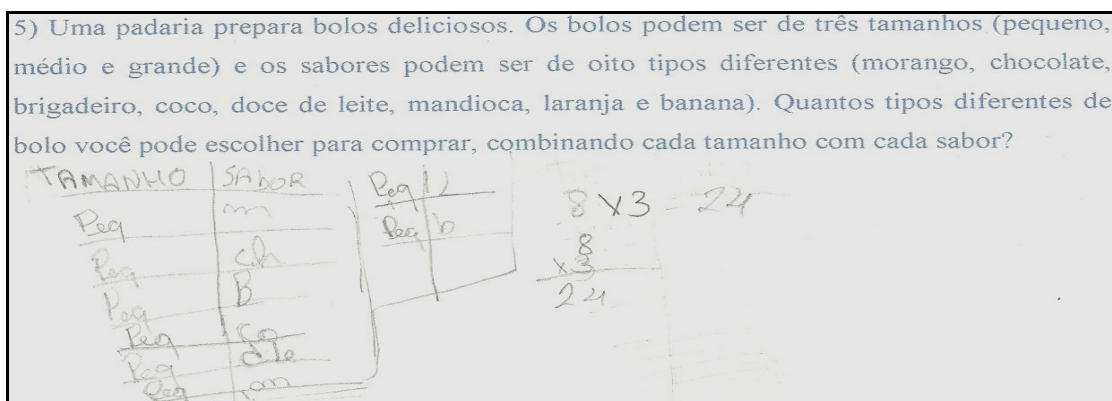


Figura 7: Resolução do problema de Produto Cartesiano com número maior de possibilidades pelo aluno Lucas, no pós-teste.

Este aluno (Lucas), no pré-teste, apresentou como resultado para o problema de Produto Cartesiano com resultados que levam a um maior número de possibilidades (*Maria tem 7 blusas (verde, azul, rosa, branca, amarela, lilás e vermelha) e 4 shorts (bege, cinza, marrom e preto) para ir à festa da escola. Quantos conjuntos ela poderá formar, combinando todas as blusas com todos os shorts?*) a resposta “Juntando 4 blusas e 4 shorts”, e passou, no pós-teste, a organizar sua resolução em forma de quadro e a escrever todas as possibilidades de combinação (uniu os oito sabores disponíveis com um dos tamanhos, (“pequeno” representado por “peq”) no contexto da preparação de bolos no qual o problema estava inserido (Figura 7). O aluno pareceu perceber que a quantidade de arrumações possíveis era de oito combinações para cada um dos tamanhos disponíveis (a partir da listagem de possibilidades para o tamanho “pequeno”, no caso), e que havia mais dois tamanhos para serem escritos, efetuando assim a operação  $8 \times 3$ , para atingir o resultado de 24 possibilidades.

Pode-se pensar sobre o porquê de tal criança utilizar a *generalização* neste problema e não ter feito esse uso na resolução desse mesmo tipo de problema com número menor de possibilidades, no pós-teste. Possivelmente, a necessidade de generalizar surge a partir do momento em que o aluno, ao iniciar a escrita das possibilidades para o problema, perceber que estas são muitas, o que faz com que ele busque outros métodos de forma a simplificar a resolução, chegando ao resultado correto sem que haja a necessidade da escrita de todas as possibilidades. Tal hipótese explica que Lucas tenha feito uso da *generalização* no problema com número maior de possibilidades e não a tenha utilizado no problema que envolvia um número menor de possibilidades.

Além disso, pode-se pensar no fato de que, a princípio, a escrita de todas as possibilidades para o problema pode ser mais significativa e segura para a criança, tendo em vista que ainda não há tanta aproximação com a resolução desses tipos de problemas. Com a prática e a resolução de mais problemas e de diversos tipos, é esperado que as crianças passem a utilizar com mais frequência a *generalização*.

### Arranjo:

Abaixo, a apresentação e discussão acerca das resoluções, pelos alunos Lucas e Marcos, dos problemas de Arranjo com número menor e maior de possibilidades, como segue:

<p>Para prefeito de uma cidade se candidataram 3 pessoas (Joana, Vitória e Rafael). De quantas formas diferentes poderemos ter o primeiro e o segundo colocado nesta votação?</p> <p>JUNTANDO RAFAEL</p>	<p>A Semifinal da Copa do Mundo será disputada pelas seguintes seleções: África, Brasil, França e Alemanha. De quantas maneiras diferentes podemos ter o primeiro, o segundo e o terceiro colocado nessa disputa?</p> <p>BOTANDO AFRICA BRASIL E FRANÇA</p>
--	---

Figura 8: Resolução dos problemas de arranjo com número menor e maior de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pré-teste.

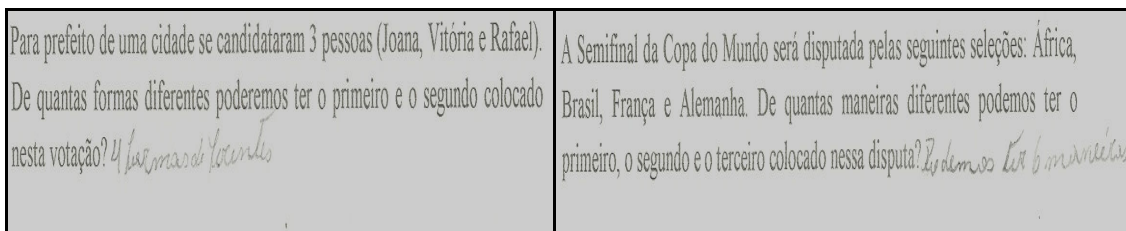


Figura 9: Resolução dos problemas de arranjo com número menor e maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pré-teste.

Lucas, apesar de listar apenas uma possibilidade, já utiliza os dados fornecidos pelo problema para resolvê-lo (Figura 8). Além disso, demonstra a percepção de um dos *invariantes* dos problemas do tipo Arranjo, que diz que de um grupo maior serão retirados elementos para formar grupos menores. Em contrapartida, a criança parece não perceber que a ordem na qual os elementos forem dispostos possibilitará a formação de novas possibilidades, tendo em vista que ela apresenta uma única resposta como solução para o problema. Tal resolução pode estar associada ainda ao fato de que algumas crianças consideram ser suficiente para responder ao problema a apresentação de apenas uma possibilidade, ainda que ela tenha a compreensão de que é possível a formação de outras.

Já o aluno Marcos, como na resolução dos demais tipos de problemas, responde com “4 formas diferentes” e “podemos ter 6 maneiras”, não utilizando, sequer, os dados fornecidos (Figura 9).

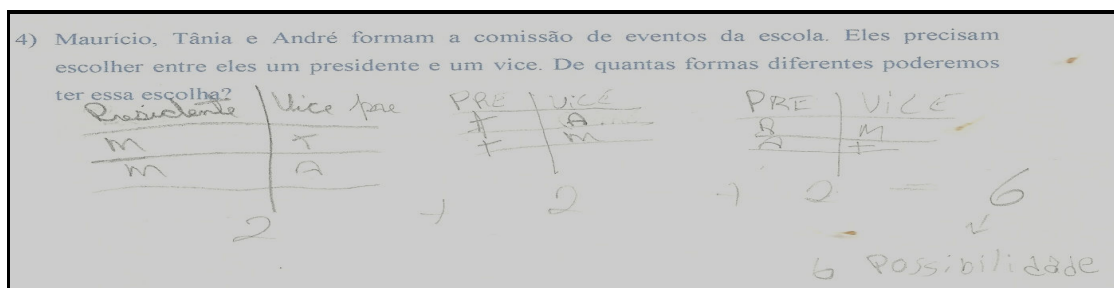


Figura 10: Resolução do problema de Arranjo com número menor de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pós-teste.

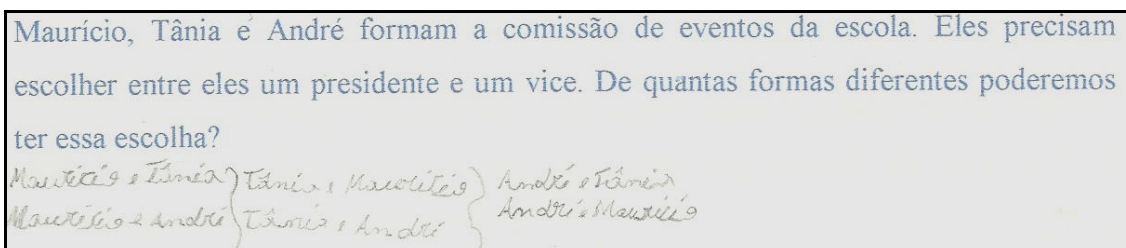


Figura 11: Resolução do problema de arranjo com número menor de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pós-teste.



Já nas Figuras 10 e 11, acima, pode-se observar a evolução da criança durante a resolução dos problemas de Arranjo com número menor de possibilidades, no pós-teste. Os alunos Lucas e Marcos passaram, em ambos os problemas, a *sistematizar* seus procedimentos de resolução, o que leva à percepção de que tal pilar, a *sistematização*, discutido durante as intervenções, foi significativo e facilitador das resoluções, parecendo ajudar durante as resoluções dos problemas combinatórios.

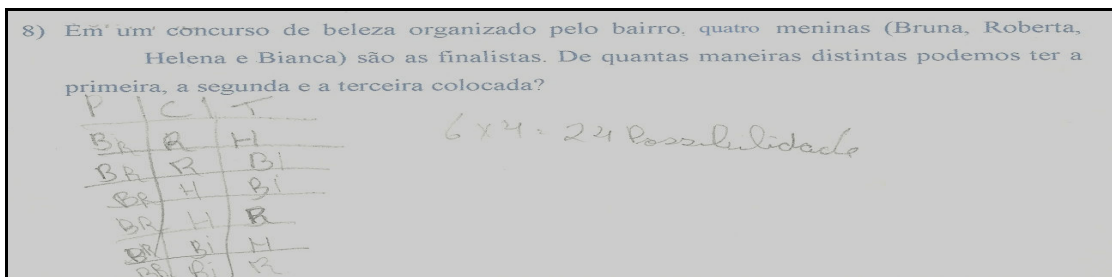


Figura 12: Resolução do problema de Arranjo com número maior de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pós-teste.

No que se refere à resolução do problema de Arranjo com número maior de possibilidades, o aluno Lucas (Figura 12) utiliza-se da *generalização*, uma vez que, como já discutido durante a demonstração das resoluções dos problemas do tipo Produto Cartesiano, quando o problema passa a envolver um número maior de possibilidades, a criança passa a buscar uma forma de simplificar a resolução do problema, de modo que não seja necessária a escrita de todas as possibilidades.

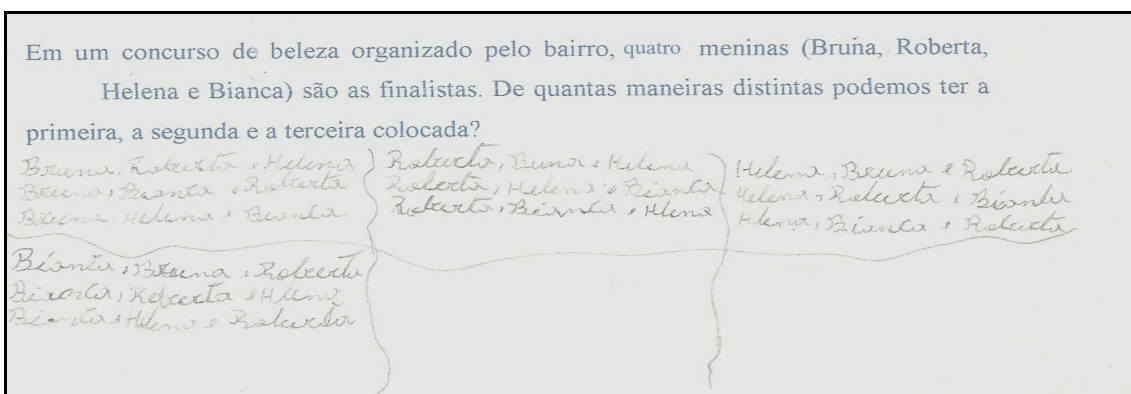


Figura 13: Resolução do problema de arranjo com número maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pós-teste.

Já o aluno Marcos, como colocado acima (Figura 13 - “Bruna, Roberta e Helena; Bruna, Bianca e Roberta; Bruna, Helena e Bianca; Roberta, Bruna e Helena; Roberta, Helena e Bianca; Roberta, Bianca e Helena; Helena, Bruna e Roberta; Helena, Roberta e Bianca; Helena, Bianca e Roberta; Bianca, Bruna e Roberta; Bianca, Roberta e Helena; Bianca, Helena e Roberta”),

apesar de não esgotar todas as possibilidades, apresenta importantes avanços no que se refere à compreensão da existência de diversas possibilidades para o problema. Antes, sua resposta para o problema de Arranjo que envolvia um número maior de possibilidades, resumia-se à “podemos ter 6 maneiras”, em um problema cuja resposta era de 24 possibilidades. Agora, ele passa a utilizar os elementos fornecidos pelo problema e a sistematizar seus procedimentos de resolução.

### Combinação:

<p>Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Lais, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas?</p> <p>Lais e Cecília</p>	<p>Para a festa de aniversário de Amanda poderão ser convidados cinco amigos entre os sete (Livia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantos grupos diferentes de cinco amigos Amanda poderá formar para ir à sua festa?</p> <p>LIVIA, CINTIA, GISELLE, JOAQUIM, PEDRO.</p>
--	--

Figura 14: Resolução dos problemas de combinação com número menor e maior de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pré-teste.

<p>Foi feito um sorteio na festa do dia das crianças da escola. Estão participando Lais, Cecília e Jane. As duas primeiras sorteadas ganharão uma boneca de presente, cada uma. Sabendo que as bonecas são iguais, de quantas formas poderemos ter as duas sorteadas para ganharem as bonecas? 5 formas diferentes</p>	<p>Para a festa de aniversário de Amanda poderão ser convidados cinco amigos entre os sete (Livia, Cintia, Giselle, Joaquim, Pedro, Allan e Gabriela) que moram na sua rua. Quantos grupos diferentes de cinco amigos Amanda poderá formar para ir à sua festa? 8 formas diferentes</p>
--	---

Figura 15: Resolução dos problemas de combinação com número menor e maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pré-teste.

Nas resoluções acima, pode-se perceber, para Lucas (Figura 14), a percepção de apenas um dos *invariantes* da Combinação, que diz que de um grupo maior são retirados elementos para formar grupos menores. Já Marcos não utiliza os elementos fornecidos pelos problemas, dificultando a análise acerca de como ele pensou para resolvê-los.

Abaixo, com a apresentação das resoluções no pós-teste, pode-se visualizar, para o aluno Lucas, os avanços no que se refere à compreensão dos *invariantes* e a utilização dos pilares adotados durante as intervenções de um modo geral.

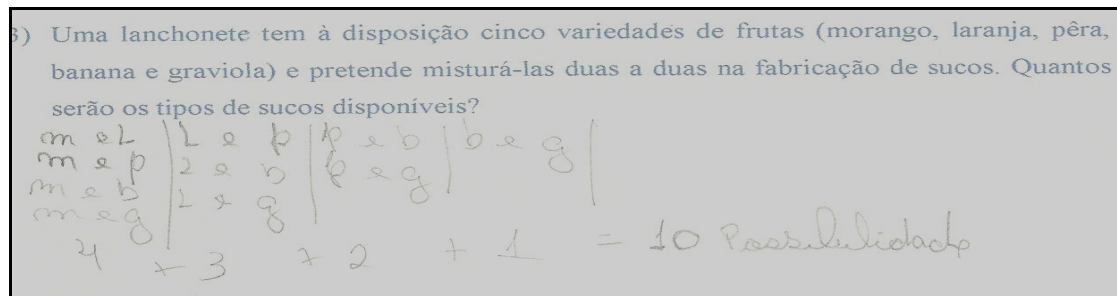


Figura 16: Resolução do problema de Combinação com número menor de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pós-teste.

No exemplo acima (Figura 16), Lucas, diferentemente da resolução apresentada no pré-teste, percebe que é possível a escrita de diversas possibilidades, além de ratificar a ideia inicial de que de um grupo maior são retirados elementos para formar grupos menores. Além disso, ele demonstra claramente a percepção de que a ordem não exerce influência durante a escrita das possibilidades, uma vez que, por exemplo, escreve a combinação “morango e laranja” (representada por “m e l”) e não a repete quando, ao esgotar as possibilidades de combinação com “morango”, passa a escrever as possibilidades com “laranja”.

Abaixo, apresenta-se a resolução de Lucas no mesmo tipo de problema, só que com um número maior de possibilidades.

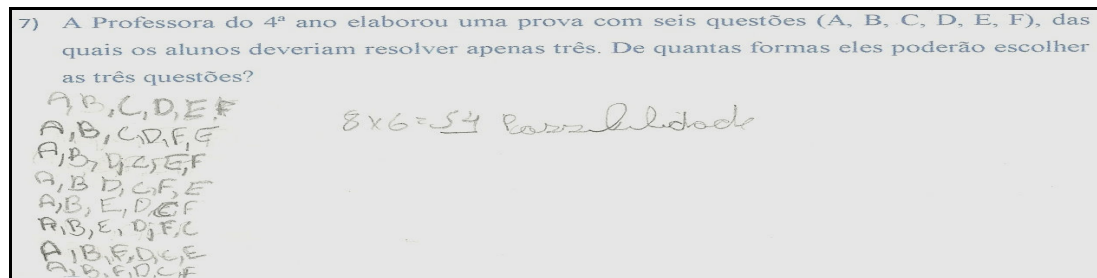


Figura 17: Resolução do problema de Combinação com número maior de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pós-teste.

Nesta resolução, percebe-se, como já discutido anteriormente, a busca pela *generalização*, tendo em vista a grande quantidade de elementos e de possibilidades para serem listadas, o que fez com que a criança, assim como nos outros problemas, buscasse a *generalização* de modo a simplificar a resolução, chegando ao resultado de forma mais rápida e menos trabalhosa.

Ainda assim, é perceptível o fato de que o aluno não obteve a resolução correta (20 possibilidades). Pensando no porquê disso, destaca-se o fato de que ele utiliza os mesmos elementos em ordens diversas, o que não é adequado ao tipo de problema apresentado (no problema do tipo Combinação, um dos *invariantes* é de que a ordem na qual os elementos são dispostos não exerce influência na formação das possibilidades). Além disso, não houve a retirada de elementos de um grupo maior para a formação de grupos menores.

O aluno usa, durante a formação de cada uma das possibilidades, os seis elementos fornecidos pelo problema. É possível que o aluno tenha resolvido ao problema considerando que ele fosse do tipo Permutação, pois os *invariantes* considerados foram os de que todos os elementos seriam utilizados, de uma só vez, durante a formação das possibilidades e o de que a ordem influenciaria na geração das possibilidades, sendo estes os invariantes da Permutação. Percebe-se também a multiplicação e sua resposta inadequada, tendo em vista que 8 multiplicado por 6 resultaria em 48 possibilidades, e não em “54 possibilidades”, como colocado pelo aluno. Apesar de não chegar ao resultado correto, a criança demonstra uma compreensão combinatória, ainda que não a tenha utilizado corretamente para o tipo de problema proposto. Se for feita a comparação com as resoluções apresentadas por ela, no pré-teste, pode-se perceber significativas evoluções.

As características apresentadas na resolução acima (Figura 17) ratificam a importância dos pilares destacados durante as intervenções. É de grande importância a *sistematização* apresentada durante a resolução e a busca pela *generalização*. Com o amadurecimento dos conceitos e a continuidade das aprendizagens, passa a haver uma maior compreensão e facilidade durante a diferenciação acerca dos *invariantes* de cada um dos problemas combinatórios, sendo este um processo que leva certo tempo para ser construído.

Já o aluno Marcos, no problema de Combinação que envolvia um número maior de possibilidades, opta por *listar* todas as possibilidades, escrevendo 20 possibilidades para o problema, a seguir:

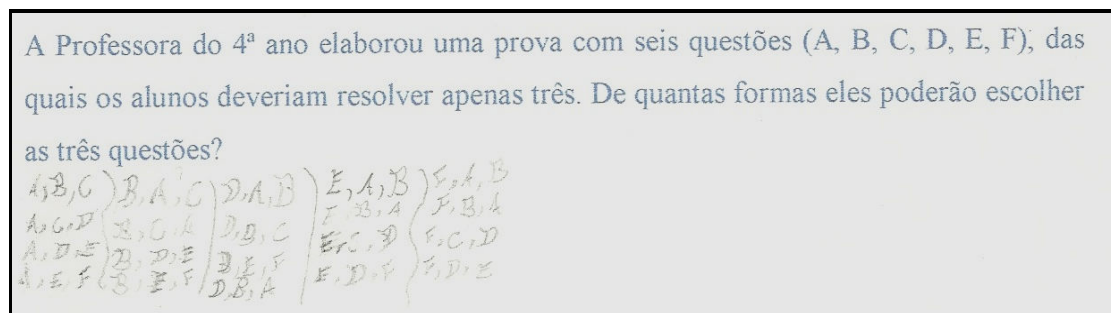


Figura 18: Resolução do problema de Combinação com um número maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pós-teste.

Apesar disso, tal criança lista os elementos “A, B, C” em ordens diversas, constituindo novas possibilidades com esses mesmos elementos. Hipótese para tal é a grande quantidade de elementos a serem manipulados, o que faz Marcos chegar ao quantitativo correto (20 possibilidades), porém, com a repetição de algumas possibilidades e deixando de listar outras.

### Permutação:

A partir das resoluções abaixo apresentadas (Figura 19 e Figura 20 – ambas no pré-teste), pode-se perceber, no primeiro problema (contexto de

organização de porta-retratos), que os alunos não utilizam, ao menos, os elementos fornecidos pelo problema, respondendo com “botando a foto de cada um nos três porta-retratos” (Lucas) e “4 formas diferentes” (Marcos).

<p>4. Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?</p> <p>BOTANDO A FOTO DE CADA UM NOS TRÊS PORTA-RETRATOS</p>	<p>8. Elizabete quer criar uma senha para que outras pessoas não mexam no seu celular. Sabendo que ela só pode usar os números 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los na mesma senha, de quantas maneiras diferentes Elizabete poderá criar essa senha?</p> <p>43-21 23-1-4 3-2-1-4 1-3-2-4 1-2-3-4</p>
--	--

Figura 19: Resolução dos problemas de Permutação com número menor e maior de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pré-teste.

<p>Na estante da minha casa há fotos do meu pai, da minha mãe e do meu irmão, sendo um total de 3 porta-retratos. De quantas formas diferentes posso organizar esses porta-retratos de modo que eles fiquem lado a lado?</p>	<p>Elizabete quer criar uma senha para que outras pessoas não mexam no seu celular. Sabendo que ela só pode usar os números 1, 2, 3 e 4, sem repeti-los na mesma senha, de quantas maneiras diferentes Elizabete poderá criar essa senha?</p>
--	---

Figura 20: Resolução dos problemas de Permutação com número menor e maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pré-teste.

Durante a resolução do problema que estava envolvido em um contexto de criação de senha para o celular, solicitando que fossem permutados os números “1, 2, 3 e 4”, Lucas apresenta diversas possibilidades para o problema, mesmo que sem o esgotamento e *generalização*, o que indica que já havia certa compreensão sobre os *invariantes* combinatórios no pré-teste. Tal constatação pode estar ligada ao contexto do problema, que pode ter favorecido a compreensão e a percepção do aluno de que era possível a criação de diversas senhas e não a de apenas uma.

Abaixo, seguem as resoluções apresentadas pelos dois alunos nos problemas de Permutação, no pós-teste.

<p>Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?</p> <p>R, A, V   V, A, R   A, V, R R, V, A   U, I, A, R   A, R, U 2 + 2 + 2 = 6 POSSIBILIDADES</p>
--

Figura 21: Resolução do problema de Permutação com número menor de possibilidades, pelo aluno Lucas, no pós-teste.

Raul, Vicente e Artur estão sentados em um sofá de três lugares, sendo que Raul está no primeiro assento, Vicente está no segundo e Artur está no terceiro. Trocando os três meninos de lugar, em quais outras posições diferentes podem sentar Raul, Vicente e Artur?

Raul, Artur, Vicente, Raul, Vicente, Artur  
Vicente, Raul, Artur  
Vicente, Artur, Raul  
Artur, Vicente, Raul  
Artur, Raul, Vicente

6 Posições diferentes

Figura 22: Resolução do problema de Permutação com número menor de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pós-teste.

Os alunos passam a *sistematizar* seus procedimentos, utilizando como estratégia a listagem de possibilidades (o aluno Lucas simplifica os nomes através das iniciais, sendo esta uma forma de representação utilizada durante as intervenções: “R, A, V; R, V, A; V, A, R; V, R, A; A, V, R; A, R, V;  $2 + 2 + 2 = 6$  ‘possibilidade’” – Figura 21). Ele (Lucas) explicita ainda a ideia de que para cada um dos elementos havia duas possibilidades de formação de grupos, ao escrever: “ $2+2+2=6$ ”. Diz-se isso no sentido de que, apesar de não efetuar a multiplicação “ $2 \times 3$ ”, Lucas, de certa forma, parece compreender ou se aproximar da compreensão acima citada.

Abaixo as resoluções dos alunos Lucas e Marcos para o problema de Permutação com número maior de possibilidades.

6) Sem repetir as letras na mesma palavra, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) podemos formar com as letras da palavra GATO?

Gota | Toga | Toga 3 Possibilidades

Figura 23: Resolução do problema de Permutação com número maior de possibilidades, pelo aluno Lucas no pós-teste.

Sem repetir as letras na mesma palavra, quantas palavras diferentes (com ou sem sentido) podemos formar com as letras da palavra GATO?

Toga, Gota, Toga

Figura 24: Resolução do problema de Permutação com número maior de possibilidades, pelo aluno Marcos, no pós-teste.

Pode-se perceber, como colocado acima (Figuras 23 e 24), que ambos os alunos apresentaram 3 possibilidades “gota, toga e toga” como resposta para o problema. Apesar de não esgotá-las, eles parecem perceber os *invariantes*



deste tipo de problema combinatório. Além de utilizar todos os elementos fornecidos, modificam a ordem na qual eles são apresentados.

Ainda assim, neste tipo de problema especificamente, e com um número maior de possibilidades, Lucas parece não apresentar avanços significativos, se em comparação com o pré-teste (Figura 19, no problema que estava envolvido em um contexto de criação de senhas), tendo em vista que ele já apresentava a compreensão dos invariantes e não conseguiu, ainda, generalizar nem sistematizar. Já o aluno Marcos, se em comparação com o pré-teste, apresentou avanços, tendo em vista que passou a *listar* algumas possibilidades para o problema.

## Conclusões

Os resultados acima discutidos permitem perceber que os alunos Lucas e Marcos demonstraram em seus procedimentos de resolução que compreenderam os pilares que foram trabalhados. Houve importantes avanços durante as suas resoluções, se comparados o pré-teste e o pós-teste e a utilização, por eles, dos pilares discutidos durante as duas sessões de intervenção, para a resolução dos problemas.

O aluno Marcos, que a princípio não explicitou suas estratégias de resolução em nenhum dos problemas propostos, passou a demonstrar, no pós-teste, em todos os problemas, as suas estratégias de resolução, o que indica importantes avanços no que se refere à importância das intervenções para este aluno, passando ele a perceber a importância de explicitar seus procedimentos de resolução, de modo a se fazer entender. É bastante significativo que um aluno que antes escrevia apenas a resposta, sem ao menos utilizar os elementos fornecidos pelo problema, passe a fazer uso da *listagem de possibilidades* e da *sistematização*, explicitando tais compreensões durante suas resoluções.

Os pilares adotados (*listagem de possibilidades* como estratégia, destaque para os *invariantes*, *sistematização* e *generalização*) estiveram presentes nas resoluções de ambos os alunos, no pós-teste, havendo um aumento quantitativo e qualitativo nos acertos.

Partir da vivência das crianças utilizando problemas próximos da realidade delas fazendo uso de uma estratégia com a qual elas demonstram ter mais facilidade (*listagem de possibilidades*), ajudá-las a refletir sobre os *invariantes* de cada um dos quatro tipos de problemas combinatórios, demonstrar e auxiliar na percepção da importância da *sistematização* e da simplificação das resoluções, possibilitada através da *generalização* dos procedimentos, mostrou-se um caminho de grande importância para o desempenho e a construção do pensamento Combinatório pelos alunos pesquisados. Assim, a partir dos resultados encontrados, tem-se a compreensão de que o trabalho em sala de aula com os pilares adotados nestas intervenções são um ponto de partida válido e eficaz para o trabalho com Análise Combinatória na Educação básica.



Além disso, destaca-se também que é preciso um trabalho contínuo com o tema abordado, tendo em vista o nível de compreensão exigido, que requer tempo para que seja assimilado pelos alunos. Em duas sessões de intervenção, foi possível perceber avanços satisfatórios para a aprendizagem, mas que indicam também a necessidade de continuidade do trabalho e da prática com a combinatória, de modo que um dos pilares, por exemplo, que foi a *generalização*, esteja a cada dia mais próximo das crianças e possa se fazer presente com mais frequência em suas resoluções.

Estudos como o atual são importantes por destacarem a importância de um ensino sistemático com a combinatória nos anos iniciais, sendo os alunos de tais anos escolares capazes de, além de criar estratégias próprias de resolução, compreender os *invariantes* de problemas combinatórios, *sistematizar* seus procedimentos e, em parte, *generalizar* os mesmos.

## Referências

AZEVEDO, Juliana; COSTA, Débora; BORBA, Rute. O impacto do software Árbol no raciocínio combinatório. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, 2011.

BARRETO, Fernanda; BORBA, Rute. Intervenções de combinatória na educação de jovens e adultos. **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, 2011.

BRASIL, MEC. **Parâmetros Curriculares Nacionais**. Matemática. 1º e 2º ciclos. Secretaria de Ensino Fundamental, 1997.

INHELDER, Barbara; PIAGET, Jean. **De la logique de l'enfant à la logique se l'adolescent**. Paris: Presses Universitaires de France, 1955.

MIGUEL, Maria Inez; MAGINA, Sandra. As estratégias de solução de problemas combinatórios: um estudo exploratório. **Anais do II Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**, Santos, 2003.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. O desenvolvimento do raciocínio combinatório dos anos iniciais aos finais da escolarização básica. In: **Anais do IV Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática - IV SIPEM**, 2009, Taguatinga – DF, 2009a. p. 1-21.

PESSOA, Cristiane; BORBA, Rute. Quem dança com quem: o desenvolvimento do raciocínio combinatório de crianças de 1ª. a 4ª. série. **Zetetiké** (UNICAMP), v. 17, p. 105-150, 2009b.

PESSOA, Cristiane; SANTOS, Laís Thalita Bezerra dos. O que fazem alunos do 5º. ano de escolarização básica diante de situações combinatórias? **Anais da XIII Conferência Interamericana de Educação Matemática**. Recife, 2011.





SCHLIEMANN, Analúcia. A compreensão da análise combinatória: desenvolvimento, aprendizagem escolar e experiência diária. In: CARRAHER, Terezinha Nunes; CARRAHER, David; SCHLIEMANN, Analúcia. **Na vida dez, na escola zero**. São Paulo: Cortez, 1988.

SOARES, Maria Teresa; MORO, Maria Lúcia. Psicogênese do raciocínio combinatório e problemas de produto cartesiano na escola fundamental. **Anais do III Seminário Internacional de Pesquisa em Educação Matemática**. Águas de Lindóia, SP, 2006.

VERGNAUD, Gérard. La théorie de champs conceptuels. **Recherches en Didactique de Mathématiques**, 1990, vol. 10, n. 2.3, 133-170.

Enviado em: 02-04-2012

Aceito em: 28-05-2012