*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

# A GEOMETRIA SE CONSTITUINDO PRÉ-REFLEXIVAMENTE: PROPOSTAS

**Adlai Ralph Detoni**[1]

Universidade Federal de Juiz de Fora – UFJF, Brasil

## Resumo

Este texto traz propostas de atividades didáticas em torno de temas pertinentes à Geometria Escolar para os anos iniciais do ensino fundamental que foram inicialmente trabalhadas em pesquisa de campo para estudos de doutoramento, cujos dados foram tratados metodologicamente na abordagem qualitativa fenomenológica. Faz-se uma exposição filosófica que sustenta uma concepção fenomenológica do espaço e reflexões de seu desdobramento para um pensamento pedagógico que valoriza o conhecimento constituído no domínio do pré-reflexivo.

**Palavras-chave:** fenomenologia; atividade; Geometria; pré-reflexivo.

## GEOMETRY CONSTITUTING ITSELF IN A PRE-REFLEXIVE WAY: PROPOSALS

## Abstract

This text brings proposals of didactic activities on themes that are connected to Geometry in the initial years of elementary school and which were initially developed in field research for doctoring studies that methodologically treated the data in a qualitative phenomenological approach. A philosophical exposition is presented and it supports a phenomenological conception of space and reflections on its unfolding into a pedagogical thinking that valorizes the knowledge constituted in the pre-reflexive domain.

**Key-words:** phenomenology; activity; Geometry; pre-reflexive.

## A GEOMETRIA SE CONSTITUINDO PRÉ-REFLEXIVAMENTE: PROPOSTAS

## Introdução

Por ocasião dos estudos de meu doutorado, foram desenvolvidas várias atividades exploradoras envolvendo temas geométricos. Ao trabalhar com crianças de 5 e 6 anos, queríamos dar vazão a uma pesquisa que

[1] Mestre em Filosofia (1994, UFJF) e Doutor em Educação Matemática (2000, UNESP-Rio Claro). Universidade Federal de Juiz de Fora, Instituto de Ciências Exatas, Campus de Martelos. E-mail: adlai.detoni@ufjf.edu.br.

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

abordava a Geometria como ciência do espaço[2]. Questionando filosoficamente o que é o espaço e, ao mesmo tempo, o que é o espaço como vivido, o ambiente praticado se fez propício para a exploração e o entendimento da espacialidade.

Para fundamentos filosóficos e metodológicos, assumo o termo espacialidade de uma indicação da fenomenologia heideggeriana, para ser afim à retomada do espaço como um fenômeno do humano, almejando desconstruir os significados históricos que contribuíram para que sua ideia se cristalizasse como uma objetividade já científica.

A princípio, as atividades eram plenamente abertas, desencadeando-se a partir de um material levado para uso não pré-programado pelas crianças. Nessa ocasião, a presença de pesquisador intencionado era fundamental para se transitar entre o que as crianças produziam espontaneamente e um sentido de pensamento matemático que se esboçava. Neste artigo, fazemos uma articulação já em segunda instância do que foi concebido, analisado e concluído na referida tese, apresentando propostas de atividades didáticas endereçadas ao que chamamos Geometria Escolar, a partir de exploração do espaço e decorrentes articulações de um pensamento geométrico.

Antes de apresentar as propostas, considero importante fazer algumas considerações acerca do apronto filosófico que se articulou para fundamentar um olhar compreensivo sobre produção de pensamento matemático em circunstâncias exploratórias, bem como do suporte metodológico que fundou o movimento da pesquisa que ajudou a produzir os resultados de minha tese.

Apresentarei as propostas sobre quatro atividades desenvolvidas. Elas terão sempre o caráter de ser complementares, e não pontuais, aos temas comuns em currículos de ensino fundamental, o que comporta dizer que não têm uma sequência indicada. Também a escolha de sua localização curricular é uma tarefa para o professor.

## O espaço como espacialidade

O espaço é um tema recorrente na filosofia ocidental desde os gregos clássicos, especialmente para filósofos – muitas vezes caracteristicamente matemáticos - com a tarefa de discutir o conhecimento. Ao longo da história do pensamento, ele é tratado menos ou mais explicitamente, de acordo com a concepção com a qual é tematizado.

Na filosofia grega mesmo, vemos que a ideia de espaço é implicitamente posta em outras ideias, como a de distância, de dimensões, de continuidade, por exemplo, e criada para ser a idealização do mundo físico. Esse espaço, ideal, forjou a tradição de tê-lo como atributo da razão humana, portanto, como preexistente ao mundo físico. Sir Thomas Heath (1981) observa que “Euclides preferiu afirmar como um postulado [...] o fato de que todos os

[2] DETONI, A. R. **Investigações acerca do espaço como modo da existência e da Geometria que ocorre no pré-reflexivo**, tese de doutorado. UNESP, Rio Claro, 2000.

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

ângulos retos são iguais; [...] esse postulado pode ser tomado como equivalente da [...] homogeneidade do espaço" (p. 375). Tal característica é necessária para que o espaço seja objeto do pensamento, e que lastrou a ciência ocidental até os primórdios do século XX.

Dessa ontologia grega do espaço comungam Descartes – cujas contribuições inovadoras residem fortemente na linguagem matemática para problemas geométricos[3] – e Kant. Este filósofo alemão refina a concepção idealista clássica, dizendo que o espaço é uma intuição humana anterior a qualquer experiência sensível, e mesmo é anterior à razão, já que, junto com o tempo, é fundante dela[4].

É interessante observarmos que o pensamento dos filósofos resvala em concepções com as quais convivemos no espaço didático e pedagógico. Parece-nos claro que a opção por se estudar Geometria privilegiando uma base que compreenda as idealidades – como as ideias de ponto, reta e plano – reflete uma aceitação do espaço como traz a tradição grega. Mais clara, senão óbvia, é a aproximação que fazemos ao estudar a Geometria analiticamente, como propôs Descartes, com base em um método que promete quebrar a complexidade do mundo em uma composição de ideias mais simples.

Podemos questionar se as geometrizações cartesianas, ao passo que constituem um espetacular escopo científico, acabam nos levando a abdicar da própria percepção do espaço que trazemos por estar no mundo. Passaria a escola a ser responsável por ensinar-nos a perceber o espaço? Quando Descartes afirma que "em verdade a extensão em largura, altura e profundidade, que constitui o espaço, é a mesma que constitui o corpo" (1951, p. 41), ele está mais buscando um atalho para expor sua concepção de espaço do que trazendo a corporeidade como signatária da percepção espacial.

Outra corrente nos fornece uma concepção distinta dessa mais idealista. Com fundamentos também em ideias forjadas por pensadores gregos clássicos, especialmente no atomismo de Demócrito, ela traz o entendimento da aceitação de que há um mundo físico dado a nós. Estamos, aqui, falando do empirismo, que cede à experiência sensível, aquela imediatamente vivida sobre o mundo físico pelos órgãos dos sentidos, as primeiras ideias, as simples, porém, as fundantes de um posterior trabalho racional.

Para essa corrente, o espaço não é uma ideia pura, mas contingente aos objetos do mundo empírico, como concebe Locke. Imediatamente associamos esse modo de pensar às propostas didáticas que sugerem trabalho a partir de materiais concretos. Quando esse filósofo nos fala de "inúmeras ideias diferentes apenas da de espaço" (1973, p. 192), ele está reforçando o espírito prático dos ingleses em dominar o espaço por meio de diversas mensurações, o que também culmina ser um modo de espacializar que está presente nas práticas curriculares em Geometria.

---

[3] "(...) eu não devo hesitar em introduzir termos aritméticos na Geometria, para motivo de uma maior clareza." (1954, p. 5)

[4] "(…) da sensibilidade são-nos dados objetos e só ela nos fornece intuições; mas é o entendimento que pensa esses objetos (...)" (1985, p. 61)

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

De todo modo, tanto a matriz idealista quanto a empirista sempre se acomodaram em pensar o espaço como algo descritível em três dimensões geométricas, perfeitamente estruturado em um sistema triaxial. Os currículos em Geometria, considerando-se todos os anos escolares, usualmente conseguem abrigar contribuições dessas duas correntes.

Em nossa imersão cultural, acostumamo-nos a essa estruturação tridimensional, que, inclusive, é ratificada pela arte renascentista e assumida pelas técnicas de fotografia e cinema, as quais, no dizer de Machado (1984) criam uma ilusão de realidade espacial. Assim, fica praticamente descabido a escola partir para uma proposta de desconstrução pura; mesmo antes da primeira aula de Geometria, a criança já traz essa cultura. No entanto, em meu estudo, importou-me relacionar esse estatuto cultural, que se corrobora em um currículo escolar, com visões críticas a ele que se põem tanto nas ciências quanto nas artes.

O relativismo que conhecemos na Física do século XX e em várias propostas estéticas, subverte a narrativa do mundo em moldes acadêmicos renascentistas e é sugestivo em questionar visões instituídas nas escolas. O espaço e o espacializar ganham novas tarefas escolares se nos atemos às sugestões de Heisenberg (1985), cuja filosofia traz consequências pedagógicas no plano de novas relações entre o aluno e seu conhecimento espacial, pois contribuem no questionamento do papel do observador do fenômeno físico. Nas artes, a literatura de Guimarães Rosa, a pintura de Bosch e o cinema expressionista são exemplos de rejeição aos padrões já feitos e de requisição da presença espacial de quem realiza uma ação, um texto, como Carlson (1995, p. 400) vê no teatro do absurdo, de Beckett e Ionesco.

Encontrei já nas ideias do grande matemático Poincaré abertura para questionamentos, quando ele coloca ser o espaço, na verdade, uma ideia em segunda instância, uma vez que é o *continuum* físico – e sua percepção por um corpo que nele se move – o manancial de nossa estada no mundo e compreensão dele. O advento dos espaços não-euclidianos foi aproveitado por Poincaré para requerer a quebra de pensamentos absolutos, afirmando que o espaço euclidiano “não é uma forma imposta à nossa sensibilidade, uma vez que podemos imaginar o espaço não-euclidiano” (1988, p. 44).

É Poincaré que nos diz que não haveria Geometria para um ser que não se movesse, claramente indicando uma alternativa didática às práticas curriculares que se pautam excessivamente no intelectual. Esse pensador nos lega uma filosofia que derruba barreiras entre as duas correntes clássicas que vimos anteriormente, e podemos perceber que acaba contribuindo para que a motricidade e o tátil, aspectos especialmente trabalhados por Piaget, ganhem valor de constituintes do conhecimento.

Em meus estudos, fui intuindo que havia uma ligação entre as concepções filosóficas clássicas sobre o espaço e aquilo que verificamos no ensino usual da Geometria nas escolas; paralelamente, constata-se um distanciamento entre os conceitos a aprender e as percepções que os alunos cultivam no mundo de suas vivências. Essa intuição me levou a encontrar nas ideias fenomenológicas um esteio para romper as distâncias que vemos

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

ocorrer entre os significados que os alunos articulam em suas vivências espaciais e aquilo que se encontra nos livros textos de Geometria.

A fenomenologia do filósofo francês Merleau-Ponty (1971) trabalha a percepção, não a percepção reduzida à sensação, esta fisiologicamente estudada, mas a percepção como um ato global de se estar no mundo com as coisas [5]. Merleau-Ponty fala de um estar que é físico, mas é também histórico, quando nosso corpo sente, mas também vive nossa história de sensações, a cada ato. Uma consequência pedagógica que tirei acerca dessa visão em minha pesquisa foi a consideração de que o conhecimento não é apenas uma reflexão sobre o experienciado, mas que o ato perceptivo é já uma compreensão pré-reflexiva.

Mesmo sem se falar precisamente em uma teoria do conhecimento, podemos, com esse filósofo, construir a ideia de que, uma vez posto um tema, um motivo, para pessoas o habitarem, um horizonte de significação se mostra e as pessoas vão atribuindo significados dialogados, até que esse horizonte se constitua em sentido articulado para a compreensão de todos. Foi com esse espírito pedagógico que empreendi as atividades de minha pesquisa junto a crianças, confirmando a possibilidade de o conhecimento se realizar dialogado, para pessoas vivendo uma intencionalidade comum.

As atividades foram criadas para a pesquisa de campo junto a crianças de uma pré-escola, numa sala de 10 crianças com idades de 5 ou 6 anos. Apesar de não me guiar por um pensamento metodológico construtivista tal como em Piaget, as propostas de atividades desse pensador suíço, junto com Inhelder, em suas pesquisas com crianças muito contribuíram.

A pesquisa de campo foi gravada em vídeo, sendo os dados produzidos analisados a partir de cenas significativas, isto é, um conjunto de falas e gestos dialogados com os quais as crianças abriam, constituíam e esgotavam determinado sentido. Os dados foram analisados segundo a abordagem fenomenológica de conduzir uma pesquisa, que solicita um quadro de ideias manifestadas pelos sujeitos e interpretadas pelo pesquisador – Análise Ideográfica – e, em seguida, a constituição das convergências dos sentidos feitos nas ideias para categorias abertas – Análise Nomotética.

A fenomenologia considera que o pré-reflexivo – isto é, o campo das percepções e compreensões imediatas – é pertinente a todos, independente do grau de intelectualidade, a cada momento de nossa presença de mundo. Porém, assumi que o campo de pesquisa escolhido compreenderia minhas preocupações em buscar respostas de pessoas que ainda não tivessem uma educação geométrica escolar iniciada, a fim de enfatizar as possibilidades de o pré-reflexivo se manifestar mais espontaneamente.

Por que espacialidade? Como vimos, credita-se a uma racionalidade transcendental, por um lado, ou à materialidade física, por outro, a gênese da ideia de espaço. Na fenomenologia, o espaço nem está dado no mundo material nem é uma criação racional; nela, concebe-se essa ideia à presença do homem no mundo, no seu mundo de vivência, que é um mundo

[5] Em sua **Fenomenologia da Percepção**, a primeira preocupação do filósofo é distinguir percepção, como um ato de tomada total do vivido pelo sujeito, das ideias psicológicas clássicas, como a da atenção, do empirismo, e a da associação de ideias, do intelectualismo.

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

de possibilidades – e não de coisas realizadas -, no qual ele age, espacializa-se, exerce sua espacialização. Por extensão, afirmamos que fazer Geometria é ocupar-se de sua espacialidade, e é este objeto, tomado como um fenômeno e não como coisa, que minha pesquisa quis investigar, com a ajuda das crianças.

## Atividades para um espacializar

A tese que publica minhas pesquisas de doutorado traz o relato de nove atividades realizadas com as crianças. Cada uma foi pensada para unir a materialidade com a potencialidade interacional no uso pelas crianças, nunca propondo metas a atingir e buscando ser convidativa e aberta para significações atribuídas. Neste texto apresento quatro delas, aproveitando resultados conseguidos na pesquisa de campo. Porém, para cada uma deixo sugestões de como podem vir a ser atividades em uma sala de aula investigativa em Geometria.

### Barbantes e elásticos

Mais do que ter uma proposta de atividade pronta, fios de barbante e de elástico – do tipo usado na confecção de roupas - sugerem o que chamamos de campo epistemológico. Isto é, um material concreto, desde os mais simples e singelos, antes que conformante de uma atividade determinada, abre um campo de possibilidades, define um campo de atribuição de significados afins.

Na Geometria Euclidiana temos comumente como postulado, a apresentação da reta ‘definida por dois de seus pontos’. Observamos, interessantemente, que um terceiro ponto não garante que tenhamos uma reta. Com as crianças, foi proposto que elas formassem equipes de três membros e, segurando com os dedos em pontos distintos, esticassem um fio de barbante. Duas equipes correram para dar conta da tarefa proposta, esmerando-se, cada qual, para ser a primeira a terminá-la, isto é, para dar alinhamento único aos dois trechos do barbante. Numa delas, um menino, que inicialmente estava no meio dos outros dois, pede para trocar de lugar com um companheiro: ele passa a comandar os dois outros colegas de equipe, usando especialmente de uma mirada para orientar o alinhamento deles. Para Piaget, a mirada é uma atitude que denota que a criança está vivendo percepções projetivas na Geometria, antes que uma intenção euclidiana.

Essa atividade nos dá uma proposta bem simples: **fazer as crianças praticarem o alinhamento e perceberem que ele é perfeito se há só duas pessoas esticando**. Na sessão da pesquisa na qual essa atividade foi levada, as significações foram se dando, indo as crianças na direção de uma conclusão teórica pertinente. Uma criança, que sobrou dos grupos formados, questionada sobre qual estava com o alinhamento mais certo, percorreu com os dedos argolados o fio esticado pelo grupo que deixou um trecho de maior distância entre dois de seus componentes. Isso, interpretamos,

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

pode representar uma conclusão euclidiana, como a afirmação de que entre duas pessoas o alinhamento está garantido.

Finalmente, as crianças dos extremos de um grupo concluem que a menina do meio está 'atrapalhando'; pedem que ela saia e, assim, exultam com a mesma frase conclusiva: "agora vai ficar certinho!".

Numa proposta seguinte, cada barbante foi fechado com um nó. Sugeriu-se que os três membros de cada equipe 'entrassem' no barbante fechado, usando seus corpos como baliza para que o fio se esticasse. Logo, a palavra 'triângulo' foi proferida por uma das crianças. A seguinte sugestão foi a de que as equipes fizessem um triângulo 'bem certinho'.

É notável como essa expressão coloquial foi compreendida e acolhida por todos e, a partir daí, motivação para uma pesquisa matemática. É interessante, também, notar como o ambiente – construído ludicamente – se faz convidativo para que cada criança se imbuia de pertencer a um mesmo projeto de atividade, tanto empreendendo seus corpos como suas vontades de dialogar.

Feito um primeiro apronto por dois grupos, uma menina que sobrava deles foi chamada a avaliar qual era o mais certinho. Depois de olhar e, inclusive, dar volta nas duas formações triangulares, ela escolhe uma delas, nitidamente a mais equilátera. Ser equilátero, e as características geométricas disso, não tinha sido posto, sendo, então, significativa a percepção espontânea das regularidades intrínsecas de um triângulo. É notável dizer que o veredito da menina foi acolhido confortavelmente, a ponto de um membro do grupo mal avaliado, referindo-se ao fato de seu triângulo ser muito pontudo, dizer: "se fosse mais pequeno, seria mais certinho!", nitidamente se atendo a uma característica angular indevida.

Para chegar também ao solicitado, a segunda equipe prefere 'copiar' o triângulo feito pela outra, e uma das crianças orienta seus dois companheiros indicando, com os braços, que os 'lados' de seu triângulo deveriam ficar paralelos aos do copiado. O paralelismo é outro caráter especialmente enfatizado por Piaget em suas pesquisas, como uma indicação de que a criança que trabalha com ele o tem como um invariante Afim, da Geometria de mesmo nome. Nessa atividade, o paralelismo veio da iniciativa de uma criança, que o traz junto com uma proposta metodológica, aliando a ideia de lados homólogos paralelos à 'igualdade' de figuras, espontaneamente sugerindo uma homotetia.

Uma proposta que vem dessa parte da atividade é imediata: buscar a **regularidade triangular**. A congruência entre os lados deverá aparecer tacitamente, mas o desdobramento de regularidades – como a decorrente congruência angular - deve ser incentivado e notado como um resultado, um conhecimento construído.

Na espontaneidade das ações empreendidas em minha pesquisa, uma menina que sobrava pediu para entrar no triângulo mais certinho para ficar 'no meio' dele. Mais uma vez uma expressão coloquial foi assumida por todas como um empreendimento matemático: ela busca ser o "centro" do triângulo meneando seu corpo, olhando a cada par de colegas que são os vértices, como que se localizando em mediatrizes. Conceitualmente, sabemos que um

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

triângulo não tem centro – de simetria -, mas a posição em que uma criança se sente centro de um círculo que se pode traçar circunscrito (ou inscrito) pode ser explorada como um desafio, o de **ser circuncentro**, cuja vivência trará, certamente, ganhos de compreensão geométrica futura.

Quando, após o uso do barbante, usamos fios de elástico, naturalmente se permitiram distintas explorações. As crianças de um grupo puderam ampliar suas distâncias, e, a partir de um triângulo inicial, um grupo foi se movimentando cuidadosamente para crescer, mas 'ficando a mesma coisa', como observou uma delas. A outro grupo foi sugerido fazer um triângulo como o do primeiro, e, trabalhando mais uma vez com paralelismo por iniciativa própria, ele satisfez-se com um triângulo semelhante, sem preocupar-se em ficar os lados homólogos com mesmo tamanho. A sugestão de que se possa trabalhar **semelhança com homotetia** é, então, consequente para fazermos uma proposta de atividade didática.

## Sólidos

Sólidos geométricos tais como esferas, cones, cilindros e poliedros em geral são materiais comuns no ensino de Geometria em séries mais avançadas do ensino básico e as escolas costumam ter modelos prontos em papelão, acrílico ou mesmo metal. Nas ações da pesquisa de campo empreendida, um conjunto deles foi disposto livremente às crianças. Imediatamente, começou-se a cogitar quais se pareciam mais com os outros, iniciando um jogo de formação de 'famílias'.

Esse jogo nos permite propor uma atividade de investigação geométrica ligada à **classificação de sólidos**. Às crianças da pesquisa não foram ensinadas escolhas da Geometria instituída, que separa os sólidos em poliedros e corpos redondos – especialmente esferas, cilindros e cones. Portanto, elas empreenderam escolhas livres e espontâneas. Para isso, formaram uma só equipe e se puseram metodologicamente a discutir uma classificação; como o lúdico era a principal perspectiva, classificaram todos os sólidos segundo sua capacidade de rolamento no chão, independente de serem poliédricos ou redondos. Assim, começando da esfera, outro sólido 'rolante' foi o icosaedro, lembrado mesmo antes do cilindro, afinal, para as crianças, uma bola icosaédrica é possível, nunca uma cilíndrica. Outro sólido redondo que ficou preterido até em relação ao cubo, para esse quesito rolamento, foi o cone, pela razão já exposta.

Essa atividade, como proposta a ser levada em aulas de Geometria, tem a virtude de explicitar que pensar matematicamente é também desenvolver processos e métodos. Consideramos ser importante esse aspecto para, quando os alunos forem aprendendo classificações na escola, vivenciarem isso sabendo que todas elas seguem escolhas, não sendo imediatamente naturais ou culturais.

De qualquer modo, classificar segundo a capacidade de rolamento não se choca com um pensamento matemático mais rigoroso, pois, por trás dessa qualidade está a ideia de regularidade, geometricamente

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

associada à possibilidade ou não de um sólido inscrever-se numa esfera, esta, exatamente, o de rolamento perfeito.

Propõem-se, então, atividades abertas, com o intuito maior de fazer com que alunos investiguem possibilidades associadas a cada forma geométrica. Outra sugestão é, aqui sempre a partir de material concreto presente, as crianças discutirem quais podem ser formas para dados da sorte, envolvendo significados geométricos e de probabilidade.

Crianças que, por exemplo, conhecem o jogo RPG sabem que há várias possibilidades de poliedros serem formas geométricas para dados da sorte, além do mais comum que é o cubo. Essa pesquisa lúdica pode entrar pelo campo dos poliedros regulares, mas, também, chegar ao interessante campo de poliedros não regulares, mas formados, geometricamente falando, pela colagem de duas pirâmides regulares iguais por justaposição de suas bases.

É importante, neste momento, refletirmos acerca do que chamamos acima de campo epistemológico. Se, ao invés de modelos prontos de sólidos, estes objetos geométricos são trabalhados com fios de elástico, outras propriedades, outras direções de significações vão emergir. Várias vezes presenciei crianças que tomam um material concreto disposto para certa orientação exploratória fazerem usos distintos e inusitados deles. Crianças podem usar os fios de elásticos para, em grupo, segurando-os com os pés no chão, esticarem arestas e formarem figuras poliédricas, como pirâmides. Como a elasticidade implica uma dinâmica, as crianças, mantendo a base com os pés, passeiam com o vértice no espaço, abrindo campo para significar obliquidades, o que com materiais rígidos não seria possível.

## Varetas

As varetas do tipo de churrasquinho, com cerca de 30 cm de comprimento, podadas nas pontas afinadas, tornam-se um material propício para se construir poliedros. Para se fazer os vértices, temos aqueles tubinhos de látex que servem de garrote para retirada de sangue para exames. Cortadas em pequenos pedaços e atravessadas umas pelas outras, vão se tornando ‘bocas’ para o encaixe de 2, 4, 6... varetas.

As varetas, que vão se tornar arestas dos poliedros, podem até ter tamanhos variados, mas, com todas iguais, temos várias explorações geométricas a serem feitas. Com as devidas restrições de segurança na preparação do material, especialmente nos cortes dos materiais, as crianças devem participar de todo o processo. O entrelaçamento dos pedaços de tubinhos é já um momento de geometrização: a percepção de que o primeiro entrelaçamento é um passo para a tridimensão certamente será espontânea na vontade das crianças em fazer construções mais arrojadas. Quando levei esse material às crianças, logo que uma delas colocou três varetas num mesmo ‘vértice’, exclamou: ‘olha, tio, dá para fazer uma forma aqui’, ao mesmo tempo em que segurava as três como um triedro. O salto dimensional foi, então, imediato e espontâneo.

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

Neste texto, imediatismo e espontaneidade são características do que afirmamos ser o domínio do pré-reflexivo, no qual as ideias são articuladas como encontro da criança com as solicitações que uma situação instaura, e não são, ainda, mediadas por uma articulação intelectual que estabelece uma cadeia de articulações de conceitos extemporâneos.

Essa é mais uma atividade na qual o material instala por si só uma proposta, mesmo que esta só se configure com o andar das ações. A emergência de um modo de 'pensar com varetas' é plenamente factível, e esse campo epistemológico deve ser habitado. Nas minhas pesquisas, disposto o material para as crianças manipularem, logo uma delas falou: 'tem que ter bastante borracha', o que as análises interpretaram como sendo ela se lançando às possibilidades que se abriam.

Uma sugestão a partir do que foi feito na pesquisa é que, antes de se começarem as manipulações, desenhos de poliedros sejam apresentados, mesmo feitos pelas crianças. Isso pode ser um motivador para as futuras construções, apesar de que a experiência com o ensino de Geometria nos diz de diferentes compreensões que ocorrem se os poliedros são desenhados, montados com papelão (faces) ou construídos com varetas. Cada modo de concebê-los tem seu movimento de racionalidade próprio, com discussões peculiares.

Quando as crianças começam a montar, métodos emergem. É interessante observar como a Matemática não é só objetos e conceitos, mas a forma de engendrá-los, de compor situações com eles. Esse é um aspecto matemático pouco explorado em aulas comandadas pelo professor, nas quais o como fazer é uma disposição ensinada. Algumas crianças preferem montar primeiro um vértice com três ou quatro varetas, para depois encaixá-los com outro mediante conexões; outras preferem primeiro montar faces.

Do que foi experimentado e analisado na pesquisa resulta uma proposta de sugerir que as crianças montem **poliedros regulares**: o cubo, o tetraedro, o octaedro, o dodecaedro e o icosaedro, conhecidos como sólidos de Platão. Essa sugestão é uma dentre uma variedade possível, nesse material rico em construções. Ela deve ser posta nas séries iniciais da escola fundamental, obviamente sem precedentes teóricos preocupados em caracterizar esses sólidos como os únicos. Mas, certamente, essa questão perpassará as ações, já que, por exemplo, crianças irão querer construir, em vão, com faces quadrangulares, um poliedro regular de oito faces.

Essa proposta implica uma noção geométrica que sobrevoará as ações: a de que todo poliedro regular se inscreve em uma esfera. É imediatamente óbvio que essa inscrição não se operacionaliza efetivamente, mas, como já dissemos neste texto, a regularidade poligonal e, agora aqui, a poliédrica, espontaneamente se assegura na circularidade e na esfericidade. A espontaneidade é coletiva; basta uma criança sinalizar um significado geométrico para as demais o tomarem sob seus olhares. Nas minhas pesquisas, uma das crianças gesticula com as mãos que o poliedro que construíam 'tem que ficar assim', movimenta as palmas de suas mãos sobre uma esfera imaginária. Apesar de tudo, não haverá inconveniente didático se a

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

regularidade poliédrica for insinuada por figuras prontas dos sólidos envolvidos por esferas.

O que há de mais importante a se desenvolver nas ações é a construção coletiva, que conjuntará propostas de como fazer e recolherá uma série de concepções geométricas que, procedentes, serão validadas pelo grupo. Uma noção interessante que aparece nessa atividade, e que normalmente não está presente no ensino usual, é a propriedade físico-geométrica de, em geral, os poliedros não serem rígidos. Essa propriedade abre uma interessante e inadiável constatação – já que algumas construções ficam molengas, por exemplo, o cubo -, que deve ser discutida e conduzida à questão básica de que só a face triangular é rígida. A rigidez é um forte exemplo de que materiais implicam rumos epistemológicos distintos; sólidos feitos a partir de faces de papelão não resultam em atividades na qual a rigidez se manifesta como questão.

Nas ações de minha pesquisa, as crianças quiseram chegar à rigidez. Para o cubo, o travamento com varetas fazendo a diagonal de faces foi proposto por elas espontaneamente. Logo se viu que as varetas, todas iguais às arestas da face, não tinham comprimento suficiente; numa solução local de engenharia, uma criança pediu que os colegas pusessem o cubo em pé, ‘certinho’ e, com duas varetas, foi perpassando uma na outra por sobre uma diagonal imaginária. Quando viu que chegou ao tamanho necessário, amarrou as duas com um entrelaço feito com elástico de dinheiro. Imediatamente uma mesma criança quis fazer o mesmo em outra diagonal, e já fez mais simples: prendeu cada vareta num vértice da diagonal e apenas juntou as duas, perpassando-as em seu comprimento. Implicitamente ali estava nascendo um teorema: triângulos garantem rigidez.

O pensamento matemático não se esgota facilmente: tal como na pesquisa de campo, as crianças podem ser levadas a, ou mesmo tomam a iniciativa de, discutir se são necessárias todas as diagonais de face para a rigidez completa do cubo. *Qual o número mínimo de diagonais para travamento completo do cubo?* é uma questão interessante de ser posta, até teoricamente, para estudantes do ensino médio, mas pode ser tratada, nas devidas circunstâncias, com crianças dos primeiros anos do ensino fundamental.

A faixa etária escolar em que devem ser aplicadas atividades como essas é um tema em aberto. Já presenciei uma oficina com esse material de varetas na qual professores de Matemática faziam o papel das crianças e, a tarefa de montarem um dodecaedro, o que, em princípio, considerou-se simples, levou um bom tempo de iniciativas e retomadas, um tempo não perdido, pois pleno de descobertas.

Não se devem descartar os maravilhamentos que propostas como essa permitem. Depois do cubo, as crianças se alegram em ver que o octaedro se fecha rígido naturalmente, salvo o fato de o látex dos vértices deixarem pequenos movimentos. Mais estupefatos ficaram ao perceber que o icosaedro, inicialmente o mais complicado de ser construído, resulta rígido e dá o melhor resultado estético, já que é o que mais se aproxima de uma esfera.

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

## Tesoura

Em uma de suas pesquisas, Piaget e Inhelder (1993) desenvolvem com crianças uma atividade com as chamadas tesouras de Nürenberg. Esses artefatos têm largo uso na engenharia mecânica, um dos mais usuais como componente das portas de ferro sanfonadas de elevadores antigos. Mas, também é um brinquedo. Basicamente, uma tesoura de Nürenberg é constituída de barrinhas delgadas iguais perfuradas em três posições, nas pontas e no meio, para que, por meio de rótulas, sejam articuladas com outras: a partir do rotulamento de duas, formando um 'X'. depois, as pontas dos 'X' são rotuladas às de outros 'X', formando um conjunto com certa extensão.

A rotulação, por si só, é um elemento de engenharia muito interessante para ser posto em sala de aula; sua característica de prender, mas permitir movimento, é uma abertura para significações dinâmicas normalmente não presentes na Geometria escolar.

A precisa perfuração igual em todas as barrinhas permite que, ao se abrir a tesoura, os espaços entre cada dois 'X' sejam iguais, todos formando losangos a cada momento de abertura. É essa característica geométrica que os citados pesquisadores aproveitaram para investigar a nomeada 'conservação do paralelismo'. De acordo com eles, as crianças avançam suas representações espaciais segundo estágios possíveis de serem previstos; há uma fase de desenvolvimento sensório-motor e mental que corresponde ao espaço Afim, o das invariâncias afins, resumidamente, aquele em que uma figura se transforma mantendo o paralelismo de seus elementos lineares homólogos. No resultado interpretado por eles (1993, p. 319-330), as crianças então participantes, mediante resposta gráfica, com desenhos dos losangos que iam se formando no movimento da tesoura, foram consideradas ainda não capazes de conservar o paralelismo.

A experiência investigativa de Piaget e Inhelder publicada foi forte sugestão para uma atividade de minhas pesquisas de campo, apesar de eu considerá-la não com os mesmos propósitos ou referenciais teóricos. No meu caso, pretendi criar um campo de atribuição de significados em torno da tesoura de Nürenberg, sem antecipar quais horizontes (o do paralelismo, o das congruências?) as crianças deveriam habitar: elas é que os construiriam. Nesse sentido, me posicionei, frente a esses pesquisadores, junto à crítica elaborada por Freudenthal (1983, p. 232-236), que os vê embalados pelas concepções de espaço e geometria expostas no *Erlanger program* e requisitando das crianças pesquisadas por eles um nível de articulação estrutural e resposta representativa inconvenientes.

Para começar, não levei o material pronto, montado. Contei para as crianças uma história a partir do personagem Edward Mãos-de-tesoura, que seria um menino da cidade de Nürenberg, incrementando suas mãos com o artefato sanfonado. Deixei as crianças desenharem na lousa as interpretações gráficas delas; foi o bastante para abrir o mundo das tesouras de Nürenberg para nós ali. Levei palitos de picolé, uma ferramenta simples perfurante e pequenos parafusos e porcas para as rótulas. É sempre uma boa sugestão

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

didática que o material seja, pelo menos parcialmente, produzido com as crianças.

Ao começar a fazer os furos, algumas crianças já iniciaram a atribuição de significados geométricos, pois intuíram a necessidade de que a furação respeitasse a congruência. É notável como a percepção das condições necessárias à mobilidade é espontaneamente traduzida em aspectos construtivos, geométricos. Crianças que nunca ouviram falar nas propriedades euclidianas dos losangos vão antecipando suas características, para que o brinquedo dê certo. Na atividade de minha pesquisa, enquanto eu ia furando os palitos, as crianças iam desenhando os 'X' e comentando aspectos de projeto; uma delas iniciou um processo de como contar os parafusos necessários para tantos 'X' que iam ser feitos.

Independente do que analisaram Piaget e Inhelder (op. cit.), os resultados de minha pesquisa nesta atividade mostraram crianças criando um espaço compreensivo comum, de construção intersubjetiva na qual os objetos e conceitos geométricos pertinentes, e só os pertinentes, apareceram. Quando já tínhamos montado uma tesoura de cinco 'X', tomei-a nas mãos e, flexionando-a, lancei uma pergunta sem precedência: "como eles (os módulos) fazem? Vai um para cada lado?" As respostas imediatamente abrangeram as questões angular, da congruência e do paralelismo; uma criança respondeu: "eles têm a mesma medida e a mesma forma de fazer o movimento. (tomando para si a tesoura) Olha, olha, fazem a mesma forma e o mesmo movimento..." Ela foi imediatamente complementada por uma colega: "É, abrem igual". Uma terceira criança ainda reforçou: "Esses dois, não, porque fazem um 'X' "(mostrando duas varetas articuladas pelo furo central). Quando um sentido geométrico vai se articulando, os significados vão se proliferando: as crianças foram manifestando a percepção de que relações entre dois losangos contíguos iam se desdobrando nos demais, e o primeiro e o próximo tinham as mesmas relações que o primeiro e o último.

Sugerir, aqui, uma atividade pronta sobre a **tesoura de Nürenberg** deixa, nitidamente, a impressão de recorte, frente à variedade de discussões matemáticas que permite. No entanto, já na preparação do material os conceitos correlatos podem ser trabalhados; deixando livre essa preparação e furando os palitos sem regularidade, as crianças podem ser levadas a perceber a obrigatoriedade de a furação seguir a congruência que virá a ser a dos losangos. Certamente o 'quadrilátero de lados iguais' passará a ser um conhecimento significativo para quem viver essa experiência.

Outra sugestão, que vem dos estudos de Piaget e Inhelder, é as crianças desenharem os resultados de diferentes momentos da tesoura abrindo. Nesse registro, podem ser trabalhados conceitos vinculados, tais como a congruência de ângulos opostos num losango, a congruência entre ângulos opostos pelo vértice de um losango para o seu próximo, a ideia de que com os mesmos quatro lados iguais temos uma infinitude de losangos, todos com lados opostos paralelos, entre outros conceitos e conclusões possíveis.

As manifestações das crianças costumam ser mais ricas do que se consegue tomar em consideração para trabalhar didaticamente. Nesta atividade com a tesoura, por exemplo, a simetria foi algumas vezes sinalizada

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

pelas crianças e não desdobradas ou exploradas nas ações, por iniciativa do pesquisador. O planejamento didático sobre atividades abertas, como as expostas aqui, é imprescindível, se se quer um aproveitamento mais completo de seus resultados.

## Considerações finais: Geometria Escolar

Um dos mais importantes documentos orientadores para currículos de educação geométrica, redigido a cargo do ICMI[6], aponta que a problemática maior da decisão do que se ensinar em Geometria se prende exatamente à riqueza de possibilidades desse campo científico, quando ganha o espaço escolar. Essa riqueza traduz a variedade bastante sensível que se vê nas distintas propostas nos sistemas escolares mundo afora. O Brasil tem seu modelo curricular característico, com algumas nuanças de diferenças, mas com certo padrão observável, principalmente a partir dos chamados livros didáticos.

Notadamente a partir do 6º ano da escola fundamental, esse padrão se refina, e, com algumas exceções, todos os estudantes brasileiros trilham um mesmo programa de conteúdos. A sugestão de que uma mesma metodologia didática e pedagógica seja seguida proximamente é bastante forte e real.

Neste texto, as propostas e as discussões que sobre elas fizemos não se prendem a essa padronagem; elas não pretendem vir a ser, nos primeiros anos escolares, uma preparação dirigida a algo especificamente posto a partir do 6º ano. Mesmo se considerando a inevitável necessidade de se ter certa linearidade no tratamento da Matemática na escola, uma pedagogia fenomenológica resistiria à colocação de que o papel do 5º ano é dar base para o 6º ano; ela entende os primeiros cinco anos completos em si mesmos.

No entanto, procurei mostrar como as crianças, instaladas em um ambiente que as convida a construírem compreensões, antecipam em sua espontaneidade diversas ideias geométricas. Muitas delas podem ser articuladas antes do rigor e da sistemática com as quais serão apresentadas aos estudantes a partir do 6º ano escolar. Muitas delas, também, infelizmente, serão depois apresentadas como verdades de uma pura lógica, como advindas de um mundo estranho ao da vivência comum. Ajudadas por um tratamento algébrico, logo formarão um conjunto de conhecimentos apenas tenuamente referidos ao que entendemos por espaço.

Por isso, a ênfase que as propostas de atividades aqui apresentadas dão ao espacializar. Os primeiros anos escolares podem fomentar os ambientes necessários para que as crianças se tornem estudantes da Matemática Escolar percebendo que os conceitos dela são correlatos de experiências vividas significativamente. Além disso, como procurei dar destaque, as crianças podem constituir a compreensão de que a Matemática

[6] Perspectives on the teaching of Geometry for the 21st century, publicado em **Educational Studies in Mathematics**, n. 28, 1995, a partir do GT de Ensino de Geometria da International Comission on Mathematical Instruction.

não é só objetos, conceitos: é também os métodos com os quais articulamos situações.

As propostas aqui trazidas se fazem a partir de materiais concretos manipuláveis. Insinuei que eles não devem ser postos para corporificação de conceitos abstratos, e, sim, responsáveis por abrir horizontes de significação geométrica. Os materiais concretos, manipuláveis ou virtuais, têm uso disseminado nas escolas. Sugeri que eles devem ser o mais simples, o menos diretivos possível. As pesquisas em educação mostram que *softwares*, quanto mais abertos, mais riqueza didática permitem. É esse espírito pedagógico que acompanha as propostas neste texto.

Atividades abertas não são sinônimo de didática frouxa. Elas devem condizer com todo um projeto pedagógico da escola, devem ser cuidadosamente desenhadas. Elas requerem uma postura do professor distinta do que chamamos tradicional. Como o professor não apresenta dirigidamente o que deve ser focado nem determina aonde chegar, o campo de atribuição de significados aberto apenas sugere o que poderá acontecer. Como não prepara uma aula nos moldes usuais, nesse caso, o professor assume a figura já conhecida na qual ele 'se prepara para a aula', criando expectativas, antecipando temas e transversalidades. Essa preparação implica conhecer mais, ter mais experiência com os objetos matemáticos, para, exatamente, não cedendo à tentação de expô-los previamente, reconhecê-los e tematizá-los quando emergirem a partir de manifestações espontâneas dos alunos.

Os PCNs em Geometria se preocupam com dois aspectos com os quais, penso, as propostas aqui trazidas têm afinidade: um é o currículo escolar se pautar nas ideias básicas e essenciais; o outro é essa direção de abrir ao aluno um ambiente de manifestação própria, sendo construtor de seu conhecimento. É interessante a prática curricular na qual as ideias matemáticas fundamentais ganham campo naquilo que nominamos aqui de pré-reflexivo, domínio em que a racionalidade está imediata à experiência corporal e cultural. A espontaneidade das crianças é um veio seguro para se fazer uma educação significativa.

As escolas devem ter espaços, tempos e acervos propícios para o trabalho manipulativo ou de virtualização. É interessante ter os jogos materiais ou em *softwares*. Porém, quis mostrar aqui a pertinência de também serem lembrados os materiais mais simples, nos quais os conceitos estão latentes, mas não implícitos. Desenhar atividades didáticas na própria escola, mesmo que não se descartem sugestões alheias, como as que vêm de livros didáticos, pode ser uma marca pedagógica de uma escola autônoma, de professores autônomos e que se preocupam em fazer educação voltada para um dos aspectos mais enfatizados nos parâmetros mais atuais: formar o aluno autônomo.

## Referências Bibliográficas

CARLSON, M. **Teorias do teatro**. São Paulo: UNESP, 1995.

DESCARTES, R. **La Geometrie**. 1ª. ed. New York: Dover Publications, 1954.

*Revista Eletrônica de Educação*, v. 6, n. 2, nov. 2012. *Artigos*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação, Universidade Federal de São Carlos, Brasil.

FREUDENTHAL, H. **Didactical phenomenology of Mathematics structure**. Dordrecht: D. Reidel Publishing, 1983.

HEATH, T L. **A history of Greek Mathematics**. v. 1. New York: Dover Publications, 1981.

HEISENBERG, W. **Física e Filosofia**. Brasília: UnB. 1985.

KANT, I. **Crítica da razão pura**. Lisboa: Calouste Gulbenkian, 1985.

LOCKE, J. Ensaio sobre o entendimento humano. In: **Os Pensadores**. São Paulo: Abril Cultural, 1973.

MACHADO, A. **A ilusão especular**. São Paulo: Brasiliense, 1984.

MERLEAU-PONTY, M. **Fenomenologia da percepção.** Rio de Janeiro: Freitas Bastos, 1971.

PIAGET, J.; INHELDER, B. **A representação do espaço na criança**. Porto Alegre: Artes Médicas, 1993.

POINCARÉ, H. **O valor da ciência**. Rio de Janeiro: Contraponto, 1988.

Enviado em: 01/04/2012

Aceito em: 13/08/2012