Artigo

Signos interpretantes em atividades de Modelagem Matemática[1]

The interpretant signs produced in mathematical modelling activities

Thiago Fernando Mendes[2], Lourdes Maria Werle de Almeida[3]

Universidade Estadual de Londrina (UEL), Londrina-PR, Brasil

Resumo

Neste artigo investigamos a produção de signos interpretantes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática. O quadro teórico em que se fundamenta nossa pesquisa articula a modelagem matemática na Educação Matemática e elementos da semiótica estruturada por Charles Sanders Peirce e reconhecida na literatura como semiótica peirceana, com foco na denominada teoria dos signos interpretantes. As argumentações teóricas são associadas a uma pesquisa empírica em que uma sequência de atividades de modelagem matemática foi desenvolvida com alunos de um curso de licenciatura em matemática na disciplina de cálculo diferencial e integral I. A análise das atividades segue encaminhamentos da pesquisa qualitativa e nos leva a inferir que, na sequência de atividades de modelagem matemática, signos interpretantes imediatos são mais evidentes na atividade de aquecimento, enquanto interpretantes dinâmicos e interpretantes finais podem ser identificados com mais frequência nas atividades de acompanhamento. De modo geral, os interpretantes dão indícios de como a derivada foi sendo usada pelos alunos para deliberar sobre a existência de valor máximo ou valor mínimo nos problemas investigados nas atividades de modelagem matemática.

Abstract

In this paper we investigate the interpretant signs production during mathematical modelling activities development. The theoretical framework is based on the relationship between mathematical modelling and some elements of the semiotics structured by Charles Sanders Peirce, more specifically in his interpretant theory. This theoretical framework is associated with an empirical research in which modelling

[1] O presente artigo inclui parte da pesquisa de dissertação de mestrado do primeiro autor, sob orientação da segunda autora. Parte destes resultados já foi apresentada em um evento da área de pesquisa, sendo este texto uma versão ampliada em que novas discussões e aprofundamentos foram realizados.

[2] Doutorando em Ensino de Ciências e Educação Matemática (UEL).
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0003-2593-8030
E-mail: thiagofmendes@utfpr.edu.br

[3] Professora do Programa de Pós-Graduação em Ensino de Ciências e Educação Matemática da UEL.
ORCID iD: https://orcid.org/0000-0001-8952-1176
E-mail: lourdes@uel.br

activities are developed by students of a Degree in Mathematics in a differential and integral calculus subject. The analysis of the activities follows qualitative research directions and leads us to infer that the students produced different interpretant signs when they developed mathematical modelling activities. In the warm up activity development it was possible to identify immediate interpretant signs, while during the follow up activities the students produced dynamic interpretants and some final interpretants for the extreme function values. In general, the interpretant signs give evidence of how the derivative was being used by the students to decide on the existence of maximum or minimum values of a function obtained when they developed mathematical modeling activities.

Palavras-chave: Educação matemática, Modelagem matemática, Semiótica peirceana.
Keywords: Mathematics education, Mathematical modeling, Peircean semiotics.

Introdução

A construção do conhecimento tem sido discutida em pesquisas de diferentes áreas no âmbito nacional e internacional. No que diz respeito à Educação Matemática, há um entendimento de que essa construção está relacionada às atividades desenvolvidas pelos estudantes e às possibilidades que as mesmas proporcionam para a abordagem do que está sendo ensinado (ALMEIDA; SILVA, 2017; ÄRLEBÄCK; DOERR, 2015; dentre outras).

Neste contexto, entendemos a modelagem matemática como uma abordagem que possibilita investigar situações não matemáticas por meio da matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

Conforme se discute em Almeida e Silva (2017), a abordagem dessas situações remete ao uso de diferentes representações e este uso pode ser associado à construção do conhecimento, especialmente no contexto escolar. O uso de representações pode indicar como o conhecimento sobre objetos matemáticos é construído pelos sujeitos. A abordagem dessas representações remete ao aporte teórico da semiótica, especificamente no que diz respeito ao estudo dos signos.

Neste texto, articulamos a modelagem matemática na Educação Matemática e elementos da semiótica estruturada por Charles Sanders Peirce e reconhecida na literatura como semiótica peirceana, com foco no que Peirce (2015) denomina de teoria dos interpretantes objetivando, a partir desta articulação, investigar o uso e a produção de signos interpretantes. Estes signos são classificados em Peirce (1972) como interpretantes imediatos, interpretantes dinâmicos e interpretantes finais. Nosso olhar se dirige para interpretantes produzidos pelos alunos de um curso de Licenciatura em Matemática no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática que requerem o uso do conceito de máximo e mínimo de funções.

Modelagem Matemática na Educação Matemática

De modo geral, atividades de modelagem matemática têm como ponto de partida uma situação inicial (problemática) e como ponto de chegada uma situação final (solução para a situação inicial), conforme discutido por Almeida (2010) e viabilizam a exploração de situações originadas fora do contexto da matemática.

A introdução de atividades de modealgem matemática nas aulas de matemática tem, portanto, o desafio de "recriar, na sala de aula, ambientes culturalmente distintos do contexto escolar" (CARREIRA; BAIOA, 2018, p. 201). Todavia, estas atividades têm também a finalidade de proporcionar a introdução, discussão e sistematização de conteúdos matemáticos. Neste sentido, a modelagem matemática pode ser entendida como uma alternativa pedagógica para o ensino de matemática (ALMEIDA; BRITO, 2005).

No âmbito da Educação Matemática, Lesh et al. (2003) ponderam que quando há o intuito de ensinar matemática por meio de atividades de modelagem matemática, atividades isoladas raramente são suficientes para produzir os resultados esperados (relacionados à aprendizagem de conceitos matemáticos), o que justifica a importância de se desenvolver sequências de atividades estruturalmente relacionadas.

A fim de indicar como as atividades podem ser organizadas para caracterizar a estrutura de uma *sequência* de atividades de modelagem matemática, Lesh et al. (2003) apresentam um esquema organizacional conforme indica a Figura 1.

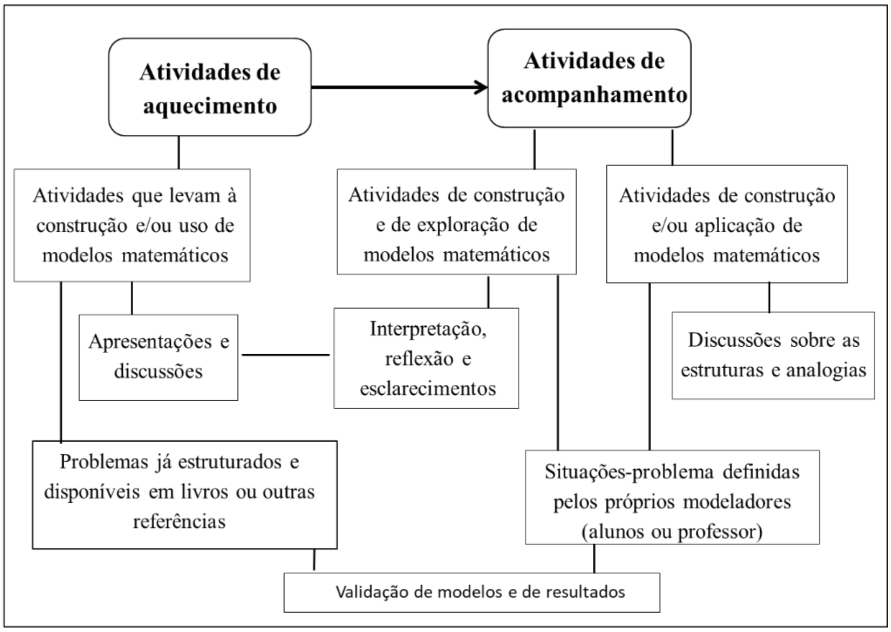


Figura 1 - Esquema organizacional para sequências de atividades de modelagem
Fonte: Adaptado de Lesh et al. (2003, p. 45).

As primeiras atividades desenvolvidas com os alunos, as denominadas *atividades de aquecimento,* visam propor aos alunos situações-problema que conduzem à construção ou ao uso de um modelo matemático. Trata-se de situações já esturuturadas em que um problema é resolvido mediante a construção, o uso e a análise de um modelo matemático. Estas atividades viabilizam ao professor responder algumas perguntas sobre pré-requisitos mínimos para os estudantes começarem a desenvolver atividades de modelagem matemática (LESH et al., 2003).

Nestas atividades, os alunos são incentivados a trabalhar em equipes e, muitas vezes, são utilizadas pelos professores no início de uma unidade do curso. Um de seus objetivos é que o estudante revele ao professor possíveis fragilidades conceituais para que elas possam ser exploradas no decorrer das aulas (LESH et al., 2003).

Após o desenvolvimento das atividades de aquecimento, segundo Lesh et al. (2003), é importante realizar dinâmicas de apresentações e discussões com toda a turma a fim de possibilitar que os estudantes tenham contato com outras formas de pensar, discutam os pontos fortes e fracos das abordagens alternativas e identifiquem as direções para a melhoria em seu próprio trabalho ou no trabalho dos demais.

As *atividades de acompanhamento*, por sua vez, consistem em atividades que devem ajudar os alunos a reconhecer conexões entre os seus conhecimentos teóricos e situações cotidianas. Assim, para além de construir modelos, os estudantes precisam realizar a exploração e aplicação de modelos, conforme definido por Ärlebäck e Doerr (2015).

Para os autores, uma atividade de exploração de modelo presta-se a levar o aluno a explorar a estrutura matemática de um modelo deduzido a partir de uma situação-problema. Diante disso, o foco deste tipo de atividade está na estrutura matemática subjacente ao modelo matemático.

Atividades de exploração de modelos matemáticos devem levar os alunos a contrastarem pontos fortes e fracos de diferentes modelos e usar linguagem matemática com precisão, cuidado e de acordo com a situação-problema em estudo (ÄRLEBÄCK; DOERR, 2018).

Ao desenvolver atividades de aplicação e de exploração de modelos, discussões sobre semelhanças estruturais entre as atividades irão fomentar as experiências dos alunos e, para além de pensar sobre os modelos construídos também se tornam aptos a discutir o uso de modelos matemáticos.

Subjacente à familiarização dos alunos com a modelagem matemática, com os conceitos, os procedimentos matemáticos está a familiarização com a linguagem matemática. Neste contexto, torna-se relevante também o aluno apropriar-se de representações que lhe permitam lidar com os objetos matemáticos que emergem das atividades de modelagem matemática. Visando dirigir nossa atenção a este aspecto, olhamos para os signos interpretantes produzidos pelos alunos no decorrer do desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática.

Semiótica Peirceana

Charles Sanders Peirce (1839-1914) matemático, físico, astrônomo, fundamentou a semiótica peirceana e utilizou o termo *Semeiotic* a partir da lógica concebida como uma filosofia da linguagem.

Para Peirce (1972, p. 94),

> Um signo, ou representamen, é aquilo que, sob certo aspecto ou modo representa algo para alguém. Dirige-se a alguém, isto é, cria, na mente dessa pessoa, um signo equivalente, ou talvez um signo mais desenvolvido. Ao signo, assim criado,

> denomino interpretante do primeiro signo. O signo representa alguma coisa, seu objeto. Coloca-se no lugar desse objeto, não sob todos os aspectos, mas com referência a um tipo de ideia que tenho, por vezes, denominado o fundamento do representamem.

A definição de Peirce para signo traz à tona uma característica fundamental da semiótica peirceana: a relação triádica que associa um *representamen*, a parte "material", do signo; um objeto, aquilo ao qual o *representamen* remete; e um interpretante, aquilo que deriva ou é gerado por um intérprete pela relação entre o *representamen* e o objeto (SANTAELLA, 2012).

A geração de novos signos – signos interpretantes – é associada com o conceito de semiose que é caracterizado como uma atividade evolutiva e corresponde à ação própria do signo de ser interpretado por outro signo (PEIRCE, 2015). O signo interpretante tem natureza de um signo criado em uma mente interpretadora. Para Nöth (2008), o efeito cognitivo do signo sobre o intérprete é que lhe possibilita gerar novos signos e é o que caracteriza a semiose.

Neste contexto, Drigo (2007) afirma que a semiose se desencadeia a partir da atualização da mente, isto é, um novo signo é gerado com a identificação de um desconforto ou uma instabilidade, cuja superação é mediada pela semiose.

Essa atualização da mente se relaciona a uma característica da semiose, que segundo Almeida (2010, p. 390), corresponde a "um processo característico da capacidade humana de produção e entendimento de signos das mais diversas naturezas".

Conforme apontam Almeida e Silva (2018), Peirce dedicou parte de seus investimentos na estruturação e classificação de signos interpretantes. Em Peirce (1972), a classificação dos interpretantes é dada como: interpretante imediato, interpretante dinâmico e interpretante final.

O interpretante imediato diz respeito ao aspecto de que cada signo tem sua interpretabilidade peculiar, antes que ele alcance qualquer intérprete. Trata-se de uma abstração consistindo numa possibilidade de representar algo para alguém.

O interpretante dinâmico é o efeito produzido na mente do intérprete pelo signo. É o efeito que o signo determina nessa mente.

O interpretante final, por sua vez, segundo Peirce (2015, p 164), "é aquilo que finalmente se decidiria ser a interpretação verdadeira se se considerasse o assunto de um modo tão profundo que se pudesse chegar a uma opinião definitiva".

Os signos interpretantes na teoria peirceana são meios utilizados para representar algo para alguém, são meios de pensamento, de compreensão, de raciocínio, de aprendizagem (SANTAELLA, 2012).

Para discutir a relação entre a ação e produção de signos em atividades de modelagem matemática e o conhecimento dos alunos, Almeida e Silva (2017) apoiam-se em aspectos da semiótica peirceana, mais especificamente no que diz respeito à semiose, para a análise de uma atividade de modelagem matemática. A partir desta análise, as autoras inferem que a semiose gera novos signos que desencadeiam a construção de novos conhecimentos pelos intérpretes e "nesse sentido, a semiose representa o processo característico da capacidade humana de produção e entendimento de signos de naturezas diversas" (ALMEIDA; SILVA, 2017, p. 216).

Neste texto olhamos para uma sequência de atividades de modelagem matemática respeitando o esquema proposto por Lesh et al. (2003) com a finalidade de investigar o uso e a produção de signos interpretantes no desenvolvimento de atividades de modelagem matemática em que o estudo de extremos de uma função é fundamental para que a solução do problema em estudo possa ser analisada.

Aspectos metodológicos

Com o objetivo de investigar o uso e a produção de signos interpretantes no desenvolvimento de uma sequência de atividades de modelagem matemática, analisamos três atividades de modelagem desenvolvidas por um grupo de três estudantes do 2º ano do curso de Licenciatura em Matemática na disciplina de Cálculo Diferencial e Integral I, no primeiro semestre do ano letivo de 2017.

O desenvolvimento das atividades foi conduzido pelo professor/pesquisador e um dos autores deste artigo havendo, entretanto, a participação da professora da disciplina em todas as aulas em que as atividades foram desenvolvidas.

Durante o período de desenvolvimento das atividades foram coletados dados por meio de gravações em áudio e vídeo. Além disso, anotações em diário de campo foram realizadas pelo professor/pesquisador, indicando elementos importantes com relação à produção e ao uso de signos pelos alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades.

A análise das informações coletadas segue princípios da pesquisa qualitativa seguindo encaminhamentos sugeridos em Bogdan e Biklen (2003).

Os signos interpretantes em uma sequência de atividades de modelagem matemática

A sequência de atividades desenvolvida é composta por três atividades de modelagem matemática, cujas temáticas dizem respeito a *Usuários de Internet no Brasil* (A1), *Otimização da dimensão de cabos elétricos* (A2) e *Perda de água no processo de distribuição da água* (A3).

Atividade 1: Usuários de internet no Brasil

As informações relativas ao tema foram entregues aos estudantes em dois textos. Um texto referente ao número de usuários de internet no Brasil e outro referente ao possível novo *bug do milênio* previsto para ocorrer em 2038 devido às configurações dos sistemas operacionais atuais. Tais textos são reportagens publicadas no Portal do Governo Federal e na Revista Online Exame.com, respectivamente.

Ao entrar em contato com os textos, os estudantes tiveram uma primeira impressão referente ao que poderiam estudar. Este primeiro contato refere-se ao que está relacionado ao acaso, ao que ainda não se trata de um fato concreto, ou seja, tal impressão é, para os estudantes, neste momento, um interpretante imediato.

No que diz respeito ao esquema de uma sequência de atividades, conforme apresentado por Lesh et al. (2003), esta primeira atividade foi desenvolvida justamente com o intuito de ajudar os estudantes a olhar matematicamente para situações cotidianas enquanto se familiarizam com atividades de modelagem matemática.

Além dos textos, os estudantes também receberam uma tabela contendo o número de domicílios com acesso à internet no país, nos últimos 11 anos de acordo com informações disponibilizadas pela PNAD[4] e pelo Banco Mundial.

A partir da discussão dos textos e do contato com os dados relativos ao número de usuários a partir do ano de 2006, foram definidos dois problemas de interesse, conforme indica a Figura 2.

Considerando os dados apresentados, foi percebida pelos alunos a necessidade de definir uma hipótese para deliberar sobre o número de usuários de internet em cada domicílio. Assim, a partir de informações dos textos foi estabelecido: H_1: Cada domicílio é composto por um casal e mais dois filhos. Com esta hipótese, os estudantes converteram os dados do PNAD, de quantidade de domicílios para quantidade de usuários.

DADOS:

Ano	Usuários (em milhões)
2006	58,68
2007	64,8
2008	75,84
2009	79,24
2010	89,96
2011	96,56
2012	105,44
2013	113,36
2014	121,28
2015	123,88
2016	129,16

PROBLEMAS:

1) *Quantas pessoas, no Brasil, terão acesso à internet no ano de 2038, ano do possível "bug do milênio"?*

2) *Qual é o máximo de pessoas que terão acesso à internet no Brasil?*

VARIÁVEIS:

n: tempo (anos)

$U(n)$: número de usuários de internet no Brasil no tempo n.

Figura 2 - Informações sobre atividade Usuários de Internet no Brasil
Fonte: relatório dos estudantes.

Vale ressaltar que antes da elaboração da hipótese e da definição das variáveis, os estudantes ficaram em dúvida com relação a diversos termos apresentados nos textos tais como *bug*, *bit* e *byte*. Assim, para sanar tais dúvidas, os estudantes efetuarem pesquisas complementares com relação ao tema a ser estudado.

[4] Pesquisa Nacional por Amostra de Domicílios Contínua - IBGE (Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística).

Nesse caso, os dados da Figura 2 também constituem um signo que produz nos estudantes uma primeira impressão com relação ao fenômeno quantidade de usuários de internet no Brasil. Conforme cita Santaella (2012, p. 46), "a primeira apreensão das coisas, que para nós aparecem, já é tradução, finíssima película entre nós e os fenômenos".

Neste primeiro contato os estudantes ainda não têm em mente a qual objeto matemático se referem os dados, não fazendo relação do signo com propriedades ou representações do objeto.

As discussões no grupo passam a ser, então, um interpretante imediato que revela tal impressão. As questões, por sua vez, indicam a interpretabilidade do signo rumo ao que poderiam conhecer com relação à quantidade de internautas no país por meio destes dados, tendo assim características de interpretante dinâmico.

Além disso, podemos considerar que, como a elaboração da hipótese se deu como uma reação às impressões que os intérpretes tiveram ao entrar em contato com as informações, tal elaboração se caracteriza como uma ação ulterior à impressão do signo, ou seja, um interpretante dinâmico.

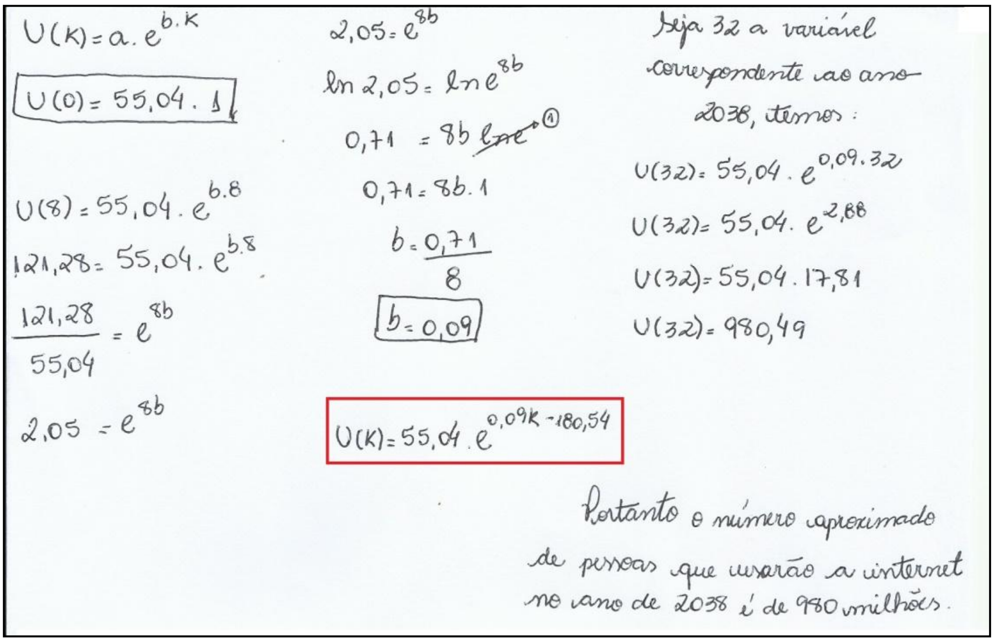
Para resolução dos problemas os estudantes decidiram analisar a variação do número de usuários no decorrer dos anos (Tabela 1), percebendo, assim, que tal variação seguia determinado padrão. Analisando este padrão, o grupo inferiu que os dados cresciam exponencialmente, já que a razão entre os dados se aproximavam da constante 1, e por isso, decidiram ajustar uma função exponencial do tipo $U(k) = a.e^{b \cdot k}$, sendo U o número de usuários de internet no Brasil, k a variável auxiliar que representa o tempo em anos e os coeficientes a e b os parâmetros da função a ser ajustada.

Tabela 1 - Análise do comportamento dos dados

Ano	Variável Auxiliar (k)	Número de usuários	Comportamento aritmético dos dados ($k_1 - k$)	Comportamento geométrico dos dados ($\frac{k_1}{k}$)
2006	0	58,68	6,12	1,104294
2007	1	64,8	11,04	1,17037
2008	2	75,84	3,4	1,044831
2009	3	79,24	10,72	1,135285
2010	4	89,96	6,6	1,073366
2011	5	96,56	8,88	1,091964
2012	6	105,44	7,92	1,075114
2013	7	113,36	7,92	1,069866
2014	8	121,28	2,6	1,021438
2015	9	123,88	5,28	1,042622
2016	10	129,16	-	-

Fonte: relatório dos estudantes.

Uma vez decidido que uma função exponencial seria usada para descrever o número de usuários de internet no decorrer do tempo, os procedimentos matemáticos adotados pelos alunos para o ajuste da referida função se encaminharam conforme indica a Figura 3:



$U(K) = a \, . \, e^{b.K}$

$\boxed{U(0) = 55{,}04 \, . \, 1}$

$U(8) = 55{,}04 \, . \, e^{b.8}$

$121{,}28 = 55{,}04 \, . \, e^{b.8}$

$\frac{121{,}28}{55{,}04} = e^{8b}$

$2{,}05 = e^{8b}$

$2{,}05 = e^{8b}$

$\ln 2{,}05 = \ln e^{8b}$

$0{,}71 = 8b \, \cancel{\ln e}$ ①

$0{,}71 = 8b \, . \, 1$

$b = \frac{0{,}71}{8}$

$\boxed{b = 0{,}09}$

$\boxed{U(K) = 55{,}04 \, . \, e^{0{,}09k - 180{,}54}}$

Seja 32 a variável correspondente ao ano 2038, temos:

$U(32) = 55{,}04 \, . \, e^{0{,}09.32}$

$U(32) = 55{,}04 \, . \, e^{2{,}88}$

$U(32) = 55{,}04 \, . \, 17{,}81$

$U(32) = 980{,}49$

Portanto o número aproximado de pessoas que usarão a internet no ano de 2038 é de 980 milhões.

Figura 3 - Procedimentos matemáticos adotados pelo grupo
Fonte: relatório dos estudantes.

O primeiro modelo determinado foi $U(k) = 55{,}04 \, . \, e^{0{,}09.k-180{,}54}$, sendo U o número de domicílios com acesso à internet no Brasil (em milhões) e k o tempo em anos.

Tabela 2 - Validação do modelo $\boldsymbol{U(k) = 55{,}04 . e^{0{,}09k-180{,}54}}$

Ano	Valor Real	Valor Modelado	Diferença (Real - Modelado)
2006	58,68	55,04	3,64
2007	64,8	60,22	4,58
2008	75,84	65,89	9,95
2009	79,24	72,10	7,14
2010	89,96	78,89	11,07
2011	96,56	86,32	10,24
2012	105,44	94,45	10,99
2013	113,36	103,34	10,02
2014	121,28	113,08	8,20
2015	123,88	123,72	0,16
2016	129,16	135,38	-6,22

Fonte: relatório dos estudantes.

Antes de apresentar a resposta para o problema de determinar o número de internautas, os grupos fizeram a validação do modelo (Tabela 2) e, como os dados do modelo se aproximavam dos dados apresentados na atividade, os mesmos consideraram o modelo adequado para a situação. Assim, com o modelo definido o grupo concluiu que em 2038 haverá no Brasil mais de 980 milhões de usuários de internet.

É possível afirmar que este é o interpretante final para esta situação uma vez que se trata, pelo menos para este momento, de uma conclusão que os estudantes atribuíram para o fenômeno (quantidade de usuários de internet no Brasil em 2038). Além disso, tal obtenção deu-se a partir de propriedades e leis matemáticas ativadas pela mente dos intérpretes, o que é característico de interpretante final.

No entanto, apesar de matematicamente o modelo estar adequado, interpretando o modelo obtido a partir do fenômeno os alunos tiveram dúvida com relação à veracidade da resposta obtida.

Assim, parece ter se configurado um crescimento na semiose dos estudantes influenciado por seus conhecimentos, tanto matemáticos quanto do fenômeno, o que se pode inferir considerando que os estudantes buscaram um “nível de fidelidade”, como chamam Almeida, Silva e Veronez (2015, p. 10), entre o modelo e o fenômeno em questão.

Então, a partir de buscas na internet, o grupo teve contato com uma reportagem publicada no Portal G1[5] que, citando uma pesquisa do Instituto Brasileiro de Geografia e Estatística (IBGE), afirma que a população brasileira nunca ultrapassará o total de 228,4 milhões de pessoas. Além disso, a mesma reportagem menciona que o Brasil terá esta população no ano de 2042

Assim, os estudantes concluíram não ser possível haver tal quantidade de usuários de internet no Brasil em 2038, uma vez que, para eles, não é possível que a população brasileira cresça tanto em tão pouco tempo. Esta análise é evidenciada nos diálogos entre os alunos do grupo.

E1: 980 milhões de usuários de internet no Brasil? Impossível, ainda mais em 2038.
E3: quantas pessoas têm no Brasil hoje? Pesquisa na internet aí.
E1: 207 milhões.
E3: nossa, está errado. O Brasil nunca vai ter 980 milhões de habitantes.

A partir disso, o grupo definiu uma outra hipótese H_2: a população brasileira se estabilizará com 230 milhões de habitantes. Após definir esta hipótese, o grupo buscou ajustar uma função exponencial com comportamento assintótico. Neste momento, os estudantes fazem o que Ärlebäck e Doerr (2015) chamam de ampliação do modelo. O grupo utiliza uma estrutura de modelo já conhecida por eles (exponencial) e o ampliam, neste caso, inibindo o crescimento do número de usuários (exponencial assintótico).

Esta abordagem matemática da situação também nos permite evidenciar um crescimento na semiose dos estudantes, uma vez que suas experiências anteriores com este tipo de função permitiram a geração de novos signos interpretantes.

Vale destacar que todos os estudantes da turma já haviam cursado a disciplina de Funções no curso e, por esse motivo, já conheciam a função do tipo exponencial de crescimento assintótico.

Os procedimentos matemáticos adotados pelos grupos para a dedução de um segundo modelo constam na Figura 4.

---

[5] Reportagem disponível em: <http://g1.globo.com/brasil/noticia/2013/08/populacao-do-brasil-atingira-maximo-de-2284-milhoes-em-2042-diz-ibge.html>. Acesso em 19.abr.2017.

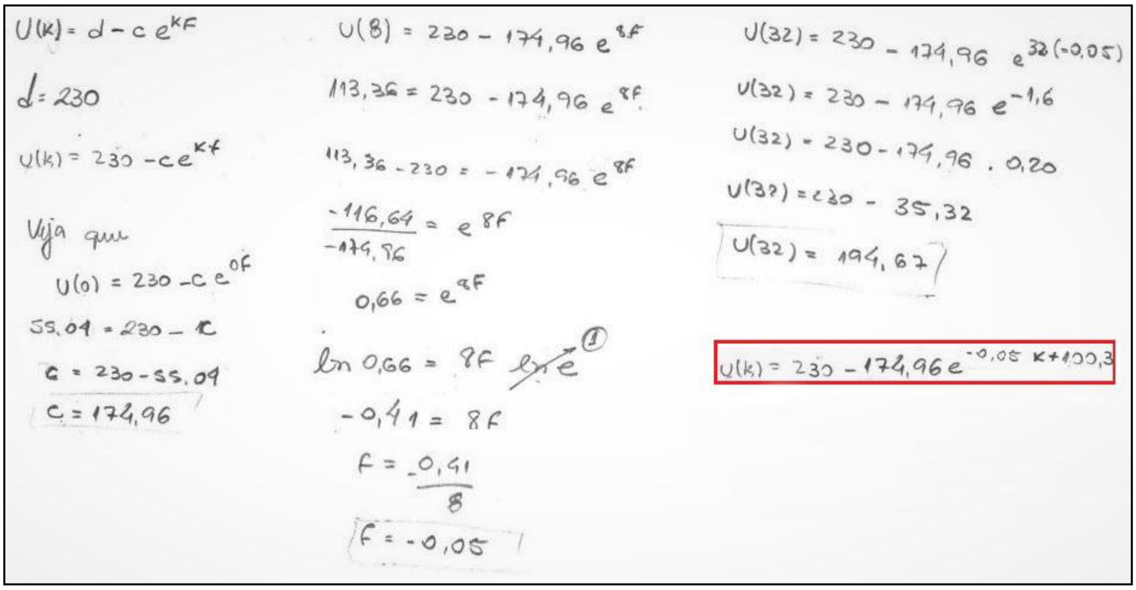


Figura 4 - Procedimentos matemáticos adotados pelos grupos
Fonte: relatório dos estudantes.

O segundo modelo determinado foi $U(k) = 230 - 174{,}96\,.\; e^{-0{,}05.k+100{,}3}$, sendo U o número de usuários de internet no Brasil (em milhões) e k o tempo (em anos).

A partir do modelo construído o grupo concluiu que, em 2038, 194,67 milhões de brasileiros terão acesso à internet, uma vez que $U(238) = 194{,}67$. Aqui, o modelo construído e a resolução do grupo para a situação podem ser tomados como signos interpretantes finais para o grupo com relação ao fenômeno investigado (quantidade de internautas), uma vez que foi o que os alunos consideraram como definitivo com relação ao problema.

Ainda a fim de responder à segunda situação-problema (*Qual é o máximo de pessoas que terão acesso à internet no Brasil*), os estudantes buscaram, inicialmente, analisar o gráfico do modelo definido, iniciando em 2006, conforme mostrado na Figura 5.

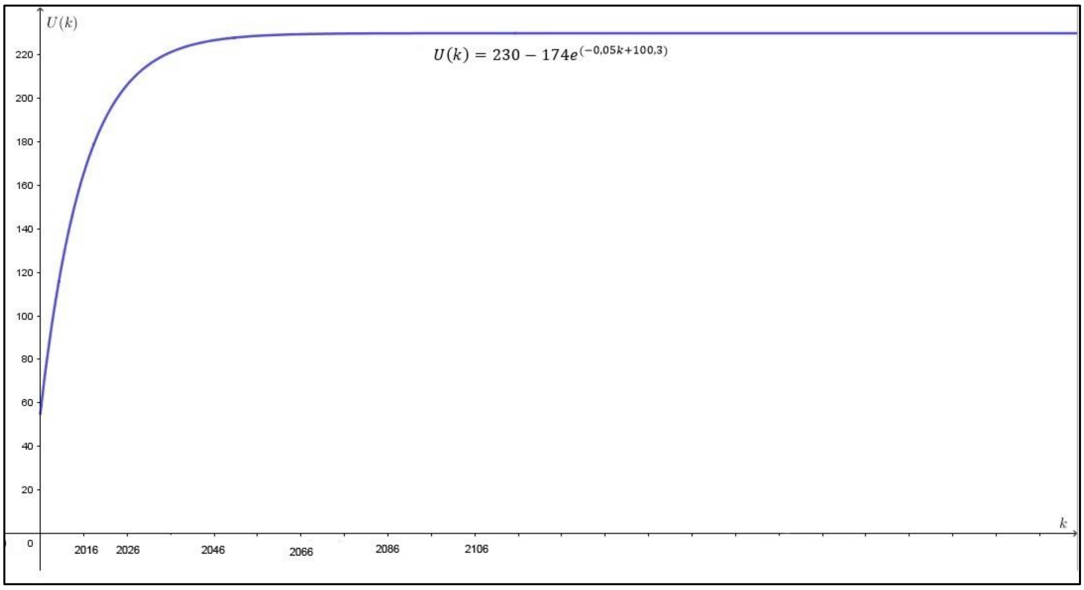


Figura 5 - Representação gráfica do modelo $U(k) = 230 - 174{,}96e^{-0{,}05.k+100{,}3}$
Fonte: relatório dos estudantes

A produção desse signo interpretante (gráfico do modelo obtido) revela experiências pessoais dos estudantes visando o entendimento da situação. Entretanto, a análise visual do gráfico foi insuficiente para determinar a quantidade máxima de usuários de internet, justamente por conta do tipo de função ajustada pelo grupo (exponencial assintótica).

Neste momento discussões se desenvolveram no sentido de investigar teorias matemáticas que, de alguma forma, possibilitariam a análise de uma função a fim de se determinar seu valor máximo e também quais são as condições para que uma função tenha valor máximo. Assim, deu-se, em aula, o início de discussões referentes ao conceito de valores extremos de uma função e como tal conhecimento poderia ser utilizado para solucionar o problema em estudo.

Tais discussões, reflexões e esclarecimentos estão em conformidade com o proposto por Lesh et al. (2003) no que diz respeito a uma atividade de aquecimento em uma sequência de atividades de modelagem matemática. No caso desta sequência, esta primeira atividade serviu como uma atividade de aquecimento para o estudo do conceito de valores extremos de uma função, uma vez que a mesma possibilitou que os estudantes iniciassem algumas reflexões a respeito da existência de valor máximo e valor mínimo de uma função. O modelo matemático construído para o fenômeno da quantidade de usuários de internet no Brasil – uma função do tipo exponencial – embora assintótica e indicando que haveria um limitante para o número de usuários, ainda não possibilitou a determinação do valor máximo de uma função.

Atividade 2: *Otimização da dimensão de cabos elétricos*

Quando esta atividade foi desenvolvida, os estudantes já haviam estudado com a professora da disciplina a definição formal do conceito de valores extremos de uma função. Assim, esta atividade viabilizou aos alunos a investigação de uma situação em que a construção e exploração de um modelo matemático seriam apoiadas justamente no uso desse conceito. Neste sentido, a atividade pode ser caracterizada como uma das atividades de acompanhamento, em referência ao esquema de uma sequência de atividades de modelagem matemática proposto por Lesh et al. (2003).

A temática de interesse dos alunos refere-se à e*scolha do cabo de energia em função da bitola*. Para a inteiração dos alunos com o tema foi discutido o texto "Instalação Elétrica segura com a Norma Técnica ABNT 5410", conforme indica a Figura 6.

Além do texto os grupos tiveram acesso também aos dados coletados pelo professor pesquisador em um laboratório de Controle e Automação que simula a queda de tensão de um condutor elétrico de acordo com a sua bitola (seção nominal), conforme mostra a Figura 6.

Neste caso, todos estes materiais previamente entregues aos estudantes (texto instrucional e tabela com os dados coletados) constituem signos que produzem nos estudantes uma primeira impressão com relação ao fenômeno em estudo.

A partir da discussão do grupo com relação aos dados, ficou definido o problema que deveria ser investigado nesta atividade: *Para a montagem de* *uma extensão elétrica (para uso residencial) quais seriam as bitolas dos cabos elétricos que apresentariam a menor e a maior queda de tensão?*

Desta forma, as discussões do grupo também passam a ser signos interpretantes imediatos que revelam a impressão destes com relação à situação. A questão definida para investigação é o que indica a interpretabilidade do signo, rumo ao que os estudantes poderiam conhecer com relação à queda de tensão por meio dos dados apresentados, caracterizando-se assim como interpretante dinâmico.

Texto introdutório da Atividade 2

Instalação Elétrica segura com a Norma Técnica ABNT NBR 5410

Tratando-se de eletricidade, o essencial é a segurança. Uma instalação elétrica mais segura e com maior qualidade é o que garante a Norma Técnica Brasileira Regulamentadora (NBR) 5410:2004. Esta Norma estabelece as condições a que devem satisfazer as instalações elétricas de baixa tensão, a fim de garantir a segurança de pessoas e animais, o funcionamento adequado da instalação e a conservação dos bens. Esta NBR 5410 determina, dentre outras coisas, a seção nominal (bitola) dos cabos, ou condutores elétricos, a ser utilizada nas instalações elétricas. Tal seção é definida de acordo com a carga elétrica que passará por este condutor.

Além da proteção, a escolha do cabo ideal pode gerar economia, uma vez que, dentre outras coisas, ela poderá minimizar o desperdício de energia. Em qualquer circuito elétrico, a queda de tensão elétrica é um fator presente. Esta queda trata-se de uma anomalia causada pelas distâncias percorridas pela corrente elétrica em determinado circuito: quanto maior for o comprimento do condutor, maior será a queda de tensão, já que há o aumento de resistência elétrica devido a quantidade maior de material utilizado para fazer maiores condutores.

Fonte: Portal da Associação Brasileira de Normas Técnicas (ABNT).

Queda da tensão de acordo com a bitola do cabo

Bitola do cabo (mm^2)	Queda de tensão por metro de cabo (Volt - V)
1,5	0,023
2,5	0,017
4,0	0,012
6,0	0,02
10,0	0,095
16,0	0,35
25,0	0,98
35,0	2
50,0	4,5
70,0	9,5

Fonte: Dados coletados pelo pesquisador.

Figura 6 - Informações sobre atividade “Qual cabo elétrico usar?”
Fonte: relatório dos estudantes.

Assim, com a intenção de encontrar a relação entre a queda de tensão e a bitola do cabo, o grupo decidiu observar os dados da tabela apresentada na Figura 6 a partir do *software* Excel, para que, observando o gráfico de dispersão dos dados e a linha de tendência (Figura 7), decidirem qual o comportamento dos dados. Logo, as informações fornecidas pelo professor e os signos interpretantes produzidos pelos estudantes a partir do *software* constituem interpretantes imediatos, considerando que produzem nos estudantes primeiras impressões com relação ao fenômeno investigado.

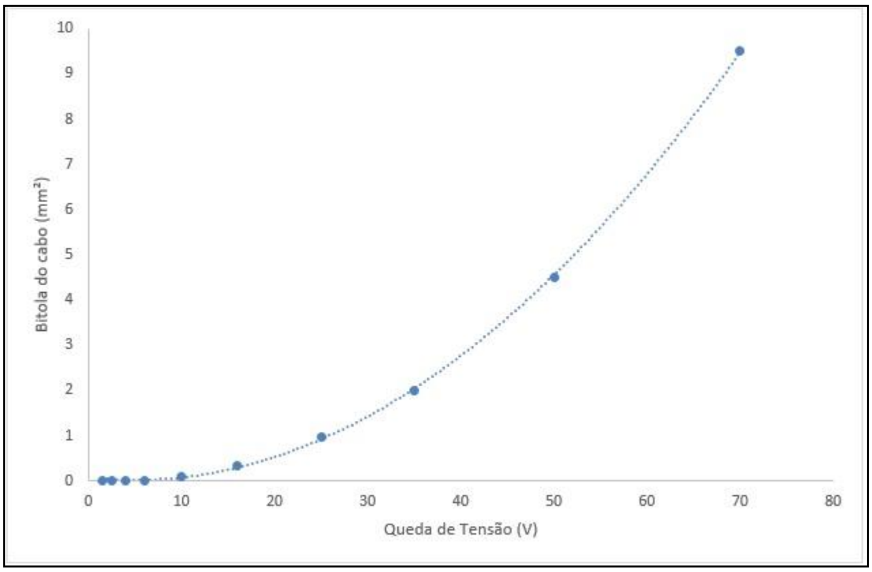


Figura 7 - Gráfico de dispersão e linha de tendência dos dados
Fonte: relatório dos estudantes.

Ao observar o gráfico, os alunos entraram em contato com um signo que representa algo em lugar de outra coisa e, a partir deste signo, decidiram formas de resolução para o problema em estudo. Santaella (2012, p. 15) afirma que “os signos só podem se reportar a algo, porque, de alguma maneira, esse algo que eles denotam está representado dentro do próprio signo” e, nesta atividade, especificamente, os estudantes evidenciaram o que estava representado (a queda de tensão com relação à bitola do cabo).

Os procedimentos matemáticos adotados pelo grupo para o ajuste da função quadrática constam na Figura 8.

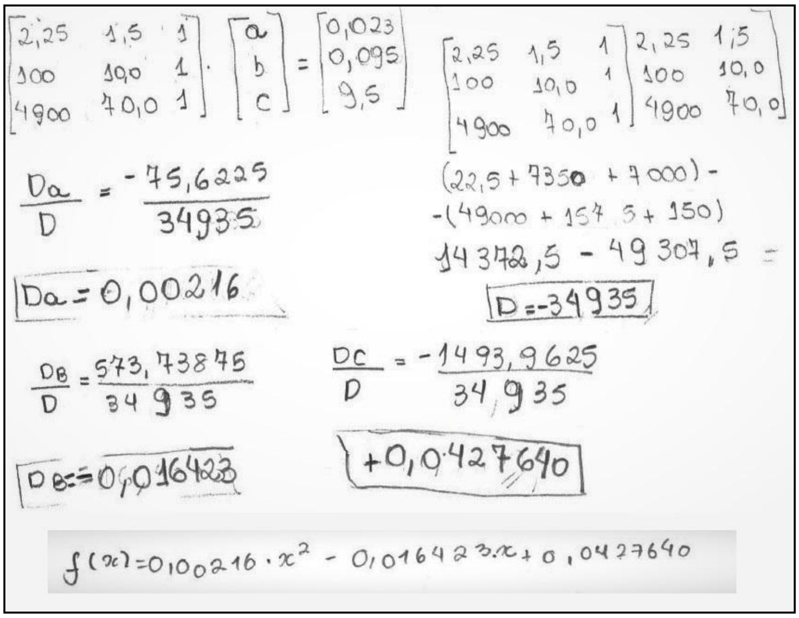


Figura 8 - Procedimentos matemáticos adotados pelo grupo para o ajuste da função quadrática
Fonte: relatório dos estudantes.

Após a obtenção do modelo $f(x) = 0{,}00216x^2 - 0{,}016423x + 0{,}042764$, em que f representa o valor da queda de tensão da corrente elétrica e x representa a bitola do cabo elétrico, os estudantes decidiram fazer a análise gráfica da função a fim de conhecer o comportamento da função. Para isso, fizeram uso do *software* Excel. A representação gráfica da função é apresentada na Figura 9.

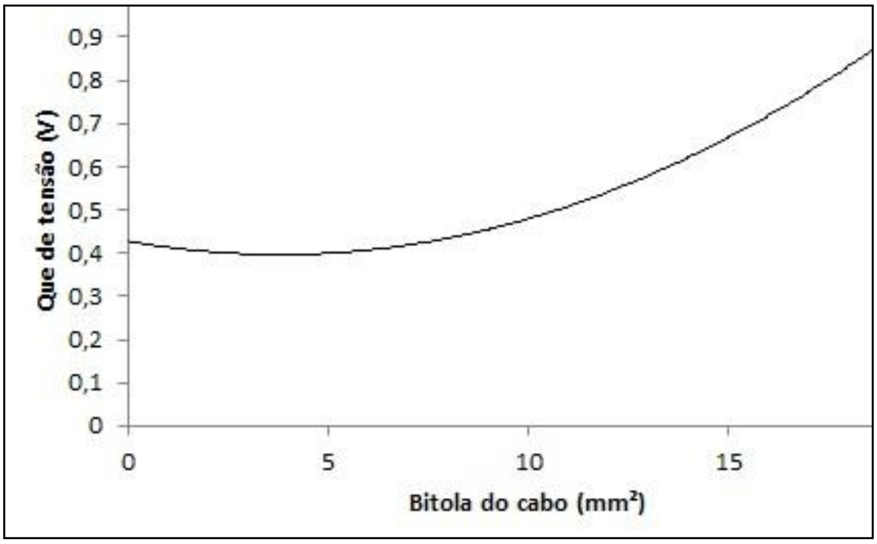


Figura 9 - Representação gráfica da função $\boldsymbol{f(x) = 0,00216x^2 - 0,016423x + 0,42769}$

Fonte: relatório dos estudantes.

A produção deste signo interpretante (representação gráfica da função) revela experiências pessoais dos estudantes visando o entendimento da situação, neste momento ainda em construção, com relação às possibilidades para obtenção de respostas à questão formulada.

Após isso, considerando que o intuito desta atividade era explorar com os estudantes a aplicação da teoria matemática, os mesmos foram introduzidos à teoria do cálculo de máximos e mínimos de uma função por meio do uso da análise da função derivada (Figura 10) para, a partir do modelo, responder à situação-problema determinada no início da atividade: *Para a montagem de uma extensão elétrica (para uso residencial) quais seriam as bitolas dos cabos elétricos que apresentariam, respectivamente, a menor e a maior queda de tensão?*

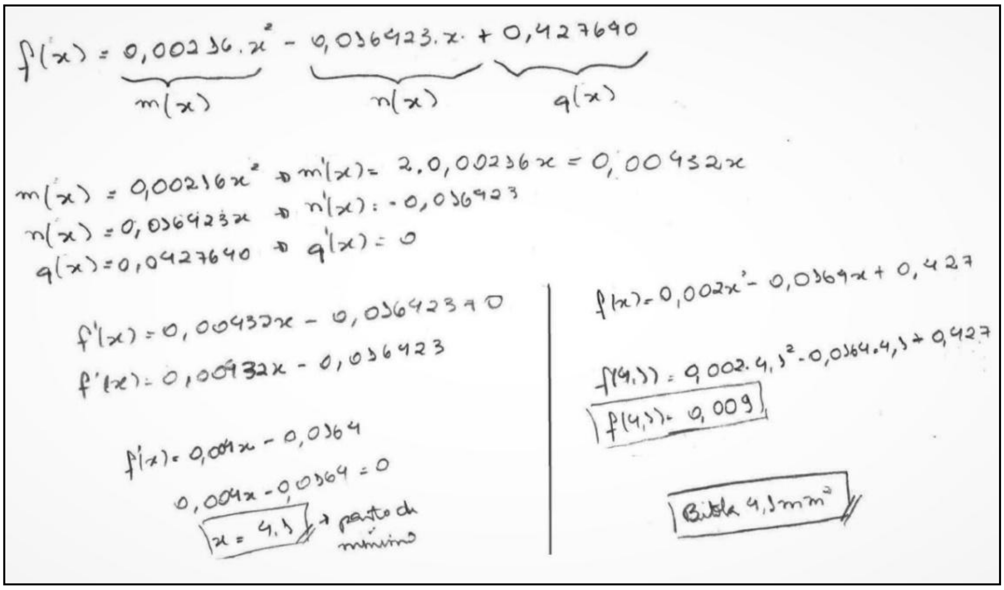


Figura 10 - Análise da derivada da função $\boldsymbol{f(x) = 0,00216x^2 - 0,016423x + 0,42769}$
Fonte: relatório dos estudantes.

A partir da análise da função derivada, o grupo responde que o cabo que apresentaria a menor queda de tensão é o que possui bitola de 4,1 mm², conforme consta na Figura 10.

Do ponto de vista do desenvolvimento matemático da atividade, o modelo que representa o fenômeno e a análise de sua função derivada ($f'(x) = 0{,}00432 - 0{,}016423$), provavelmente, corresponde a um interpretante final. De fato, conforme afirmado por Peirce (2015, p. 164), o modelo poderia constituir "uma interpretação verdadeira" que, neste caso, satisfaz e é suficiente para a obtenção das respostas para as questões relacionadas à escolha dos cabos.

Como uma atividade de acompanhamento, mais especificamente, uma atividade de exploração de modelo, o foco estava, desde o início, na estrutura matemática subjacente ao modelo desenvolvido pelos estudantes.

Assim, independentemente da maneira escolhida pelos alunos para definição do modelo matemático, neste caso o uso da Regra de Cramer para ajuste de uma função polinomial de segundo grau, a intenção da atividade era, após o modelo ter sido desenvolvido, explorar como definir o valor máximo (ou mínimo) deste tipo de função.

Atividade 3: *Perda de água no processo de distribuição da água*

O tema escolhido pelo grupo para esta atividade foi a *Perda de água no processo de distribuição da água* e as motivações para a escolha do tema, segundo o relatório do grupo, foram: os problemas mundiais sobre o desperdício de água; a facilidade de o grupo conseguir dados sobre a distribuição e perda de água na cidade em que moram, considerando que um dos integrantes trabalha na empresa responsável pela distribuição de água nesta região; e o fato de a cidade ser considerada uma das cidades da região mais problemática com relação à perda de água na distribuição segundo dados extraídos de documentos da SANEPAR-PR[6].

A situação-problema determinada pelo grupo foi *elaborar um modelo matemático que possibilite previsões a respeito da perda de água no município ao longo dos anos*.

A fim de responder à situação inicial proposta, o grupo, a partir de dados fornecidos pela SANEPAR, elaborou a Tabela 3.

Tabela 3 – Dados coletados pelo grupo

Média anual de perda de água em Uraí-PR		
Ano	*Média Anual de Perdas*	*Média em mil m³*
2010	15297,0474	15,30
2011	16339,24873	16,34
2012	19962,37477	19,96
2013	24396,12128	24,40
2014	23106,93438	23,11
2015	24839,15784	24,84
2016	24908,88119	24,91

Fonte: relatório dos estudantes.

Tendo os dados tabelados, o grupo realizou duas análises visando conhecer o comportamento da perda de água com relação ao ano e definir metas para resolução da situação-problema. Além disso, decidiram analisar a dispersão dos dados no *software* Geogebra para visualizar esse comportamento. Os registros de tais análises são apresentados na Figura 11.

Neste caso, os signos dão evidências de que os estudantes compreendem que para a visualização dos pontos correspondentes à perda de água no processo de distribuição, é adequada uma disposição espacial em forma de tabela (Tabela 3).

A fim de identificar se o crescimento dos dados se dava a partir de uma constante, os estudantes optaram por fazer uma análise aritmética (subtraindo o desperdício de um ano de seu anterior) e geométrica (dividindo o desperdício de um ano de seu anterior) da variação dos dados, com isso, observando que o comportamento geométrico aproximava-se mais da constante 1 (conforme consta na Figura 11). O grupo inferiu que tratava-se de um comportamento exponencial e não linear e assim, os estudantes decidiram determinar um modelo do tipo $F(x) = a + b.e^{x.k}$, sendo F o volume de água perdido (em mil m³) e x o tempo (em anos) a partir de 2010.

[6] Companhia de Saneamento do Paraná.

Análise da variação dos dados

ANÁLISE DE CRESCIMENTO ARITMÉTICO	ANÁLISE DE CRESCIMENTO GEOMÉTRICO
0,78	1,068,131
1,21	1,221,744
-0,81	1,222,105
-3,50	947,156
-0,30	1,074,966
0,05	1,002,807
2,25	0

Gráfico de dispersão dos dados

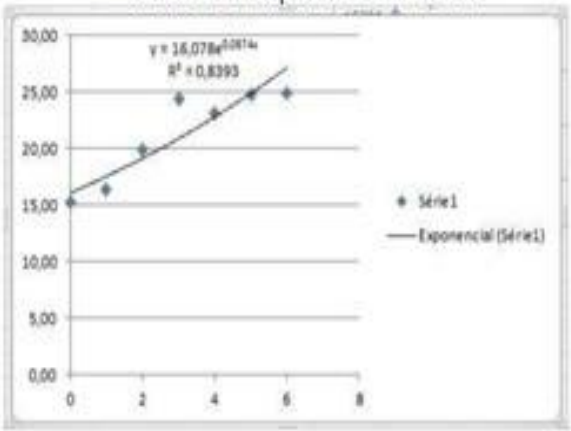


Figura 11 - Registros das análises do comportamento dos dados
Fonte: relatório dos estudantes.

A hipótese definida pelos alunos foi de que *o volume máximo perdido na distribuição nunca ultrapassará 40% do volume total distribuído*. A hipótese foi elaborada devido a um critério imposto pela empresa de distribuição de água de que a perda no processo de distribuição nunca deve ultrapassar 40% do total distribuído, mesmo considerando o desperdício dos usuários e os problemas nos encanamentos. Assim, este valor de 40% foi considerado, pelo grupo o valor da assíntota da função a ser ajustada.

Assim, tanto a tabela em que os estudantes analisaram o crescimento da função quanto o gráfico, em um primeiro momento, foram, para este grupo de estudantes, signos interpretantes imediatos capazes de transmitir informações importantes aos intérpretes com relação ao fenômeno (perda água na distribuição). Tais informações, de certo modo, conduziram a investigação do grupo levando os intérpretes a terem algumas reações (interpretantes dinâmicos).

Os procedimentos matemáticos adotados pelo grupo para o ajuste da função exponencial são apresentados na Figura 12.

Para obter os valores para a função:

$$F(x) = a + b.e^{(x.k)}$$

Foram substituídos os valores para então identificar os valores das incógnitas presentes na função:

$$F(x) = 23{,}912 + b.e^{(x.k)}$$
$$15{,}3 = 23{,}912 + b.e^{(x.k)}$$
$$\boldsymbol{b = -8{,}61}$$

$$16{,}34 = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(1.k)}$$
$$16{,}34 - 23{,}912 = -8{,}61.e^{k}$$
$$-7{,}57 = -8{,}61.e^{k}$$
$$-7{,}57/-8{,}61 = e^{k}$$
$$0{,}87 = e^{k}$$
$$log.0{,}87 = log.e^{k}$$
$$-0{,}06 = k.log.e$$
$$-0{,}06/0{,}43 = k$$
$$\boldsymbol{k = -0{,}13}$$

O qual atribuindo os valores das incógnitas resulta em um modelo para essa função, que é:

$$F(x) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13*x)}$$

Como o objetivo era encontrar um modelo que possa ser usado em relação ao ano em que se deseja investigar a perda de água, adequamos o modelo que está relacionado à variável auxiliar, de modo que obtemos:

$$F(x) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13*x)}$$

Sendo $x = a - 2010$

onde $a = ano$

temos que:

$$F(a) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{[(-0{,}13.(a-2010)]}$$
$$F(a) = 23{,}912 - 8{,}61.e^{(-0{,}13a+261{,}3)}$$

Figura 12 - Procedimentos adotados pelos estudantes para ajuste da função exponencial
Fonte: relatório dos estudantes.

Após determinar o modelo $F(x) = 23{,}912 - 8{,}61 \,.\, e^{(-0{,}13x+261{,}3)}$, o grupo realizou a validação do mesmo comparando os resultados obtidos pelo modelo com os valores fornecidos pela empresa de saneamento. Considerando válido o modelo obtido, o grupo o utilizou para prever a perda de água nos próximos 5 anos a partir de 2017 (Tabela 4).

A obtenção do modelo e sua posterior interpretação e validação indicam signos interpretantes finais pois, neste momento, o olhar dos estudantes está carregado de interpretação, de busca de explicação, de análise e generalização, na qual o grupo poderá interpretar os dados que correspondem ao objeto matemático (função exponencial) de acordo com leis e conceitos matemáticos.

Tabela 4 - Previsão sobre a perda de água em Uraí-PR

Ano	*Previsão de perda de água (em mil m³)*
2017	20,44
2018	20,86
2019	21,23
2020	21,56
2021	21,85
2022	22,10

Fonte: relatório dos estudantes.

A fim de aplicar seus conhecimentos de máximo e mínimo de uma função, dado o contexto em que a atividade foi desenvolvida, os estudantes determinaram um segundo problema: *considerando o modelo matemático definido, em qual ano ocorrerá, ou ocorreu, a menor perda de água no processo de distribuição de água na cidade?*

Para responder tal questão, os alunos decidiram analisar a função derivada do modelo obtido ($f'(x) = 1{,}1193 \,.\, e^{(-0{,}13.x+261{,}3)}$). Para isso, os estudantes fizeram uso de duas regras de derivação que já haviam sido estudadas em aulas anteriores: a regra da derivada do produto e a regra da cadeia para derivadas de funções compostas. Os procedimentos realizados pelos estudantes estão descritos na Figura 13.

Com a análise da função derivada, o grupo conclui que 2010 foi o ano em que ocorreu a menor perda de água na distribuição de água na cidade. Neste momento, este é o interpretante final do grupo para esta situação.

No entanto, em determinado momento, é possível perceber que o grupo considerou, equivocadamente, que $ln0 = 0$. Além de estar inadequada, a análise da função derivada apresentada pelo grupo evidencia uma fragilidade dos mesmos com relação ao conceito de função derivada e o que esta significa ao ser aplicada no estudo do fenômeno.

APLICAÇÕES DA DERIVADA NA FUNÇÃO $f(x) = 23,912 - 8,61.e^{-0,13x+261,3}$

Primeiramente calculamos a derivada de $f(x)$

$$f(x) = 23,912 - 8,61.e^{-0,13x+261,3}$$

(23,912 é uma constante, portanto sua derivada é zero e não consideramos)

Então

$$f'(x) = g'(x).h(x) + g(x).h'(x)$$

Sendo

$$g(x) = -8,61$$
$$g'(x) = 0$$
$$h(x) = e^{-0,13x+261,3}$$

Onde

$$h'(x) = e^{u}.u'$$
$$u = -0,13x + 26,3$$
$$u' = -0,13$$
$$h'(x) = -0,13.e^{-0,13x+261,3}$$

$$F'(x) = 0.e^{-0,13x+261,3} + (-8,61.-0,13.e^{-0,13x+261,3})$$
$$f'(x) = 1,1193.e^{-0,13x+261,3}$$

Quando $f'(x)$ é igualada a zero, encontramos o ponto crítico da função:

$$f'(x) = 1,1193.e^{-0,13x+261,3}$$

$$1,1193.e^{-0,13x+261,3} = 0$$

$$e^{-0,13x+261,3} = \frac{0}{1,1193}$$

$$-0,13x + 261,3.lne = ln0$$

$$x = \frac{261,3}{0,13}$$

$$x = 2010$$

Portanto, 2010 é o ponto crítico da função.

Figura 13 - Análise da função derivada do modelo obtido
Fonte: relatório dos estudantes

Com o decorrer das aulas, o grupo entregou uma nova versão do relatório contendo uma correção com relação à aplicação da derivada no modelo obtido. Essa correção é apresentada na Figura 14.

> Com o decorrer das aulas foi possível uma melhor compreensão a respeito do comportamento da função. Por se tratar de uma função exponencial, a mesma é crescente a todo momento. Portanto, já que o seu comportamento é totalmente crescente, é possível concluir que a função não possui ponto crítico, nem ponto de inflexão (que é o momento em que a curvatura da função é modificada). Por isso, os cálculos anteriores estão equivocados.
> O que faz sentido para o nosso modelo, uma vez que, dentro dos dados obtidos, não houve um momento em que a perda de água diminui no decorrer dos anos, a perda é sempre maior com o passar dos anos.

Figura 14 - Correção do grupo quanto à análise da função derivada do modelo
Fonte: relatório dos estudantes.

A partir da justificativa apresentada pelo grupo temos indícios de que, com o andamento das aulas, uma nova semiose foi desencadeada pelos estudantes e o interpretante final gerado na atividade (em 2010 - primeiro ano em que a perda de água foi analisada - houve a perda mínima na distribuição), gerou novos interpretantes que resultaram em outra compreensão dos alunos com relação ao fenômeno (como seu comportamento é totalmente crescente, conclui-se que a função não possui ponto crítico, nem ponto de inflexão, ou seja, não é possível determinar um ano em que houve perda mínima) o que vai ao encontro do que afirmam Almeida e Silva (2017, p. 218), de que “atividades de modelagem matemática desencadeiam semiose e, semiose realiza construção de conhecimento”.

Assim como a anterior, a situação-problema a ser explorada nesta atividade foi determinada pelos próprios estudantes. No entanto, diferentemente da segunda atividade, cujo foco centrou-se na estrutura matemática do modelo a ser obtido pelos mesmos, nesta terceira atividade o objetivo foi levar os alunos a pensar em uma variedade de situações em que poderiam utilizar o modelo obtido, característica de uma atividade de aplicação de modelo, conforme definido por Ärlebäck e Doerr (2015). No caso desta atividade, os estudantes utilizaram a mesma estrutura matemática do modelo obtido na atividade 1 (Usuários de Internet no Brasil), ampliando, assim, os contextos de aplicação da função exponencial de comportamento assintótico.

Discussão e resultados

As interlocuções entre modelagem matemática e semiótica peirceana vêm sendo tema de interesse de professores/pesquisadores da área (ALMEIDA E SILVA, 2017; ALMEIDA, 2010). Neste artigo, particularmente, dirigimos nossa atenção ao uso de signos interpretantes pelos alunos quando desenvolvem uma sequência de atividades de modelagem matemática, em consonância com o que caracterizam Lesh et al. (2003). A sequência de atividades que apresentamos tinha como objetivo introduzir na disciplina o conceito de valores extremos de uma função real.

O desenvolvimento da sequência de atividades possibilita a organização e elaboração de signos, evidenciando aquilo que os estudantes conhecem com relação à matemática e ao fenômeno.

A análise dos signos produzidos ou utilizados pelos estudantes nos possibilita inferir que uma sequência de atividades de modelagem matemática propicia momentos de exploração e aplicação de modelos, seja no momento em que os estudantes sentem a necessidade de refinar seus modelos para melhor representar o fenômeno explorado ou mesmo quando usam os modelos obtidos em contextos distintos, o que evidencia que os conhecimentos anteriores dos estudantes e suas experiências são fundamentais para a resolução das situações exploradas.

No desenvolvimento da sequência os interpretantes imediatos, conforme classificação da semiótica peirceana, estão relacionados às primeiras impressões evidenciadas pelos intérpretes ao entrarem em contato pela primeira vez com as situações a serem exploradas.

Os signos interpretantes dinâmicos, por sua vez, estão relacionados às reações dos intérpretes aos seus interpretantes imediatos. Além disso, tais interpretantes dinâmicos estão relacionados com a busca de informações que os estudantes buscam para iniciar o estudo das situações com a definição do problema a ser resolvido, com a existência de algo a ser explorado.

Os signos interpretantes finais na sequência de atividades de modelagem matemática estão relacionados à obtenção e dedução do modelo matemático e à obtenção dos resultados matemáticos e sua validação, levando em consideração aspectos relacionados à matemática e ao fenômeno.

A primeira atividade da sequência - *Usuários de internet no Brasil* - foi desenvolvida antes do primeiro contato dos alunos com o conceito de extremo de uma função. Ela constitui na sequência uma atividade de aquecimento, conforme caracterizado por Lesh et al. (2003), visando envolver os alunos na ação de construir um modelo matemático e discutir sua relevância para a abordagem de um problema não matemático.

Ärlebäck e Doerr (2015) afirmam que atividades de aquecimento devem confrontar os alunos com a necessidade inicial de desenvolver um modelo a fim de darem sentido a uma situação previamente definida. Considerando esta asserção, foi proposta aos estudantes uma problemática que necessitava da dedução de um modelo matemático a fim de se obter uma solução, além disso, para tal obtenção, conteúdos matemáticos anteriormente estudados precisaram ser aplicados e explorados. No contexto da disciplina de Cálculo Diferencial e Integral, ela proporcionou a construção de um modelo assintótico. Assim, embora a função não tenha um valor máximo, possiblitou discutir o significado de assíntota no estudo de um fenômeno.

Neste sentido, o uso e o manuseio com os dados e com a construção do modelo matemático, vêm cercados de signos interpretantes que, ainda não proporcionam contato com o conceito de valor extremo de uma função, mas auxiliam na interpretação de um modelo assintótico.

Conforme discutido na literatura, é comum que uma atividade de aquecimento cause certos desconfortos nos estudantes (LESH et al., 2003; ÄRLEBÄCK; DOERR, 2018). Na primeira atividade, tais desconfortos puderam ser identificados, por exemplo, no momento em que os estudantes julgaram necessário o levantamento de hipóteses para resolução das atividades e a necessidade de pesquisas complementares para compreender a situação em estudo. A superação desses desconforto foi mediada pela ação dos signos interpretantes, em consonância com o que defendem Almeida e Silva (2017), e pode ser um indício de semiose nesta atividade.

Na segunda atividade da sequência de atividades de modelagem matemática, na fase de atividades de acompanhamento, embora o tema tenha sido sugerido pelo pesquisador e também ele tenha levado os dados para a sala de aula, os alunos construiram o modelo matemático sem a intervenção do professor.

Nesta atividade com o tema *Otimização da dimensão de cabos elétricos* o intuito foi explorar a aplicação de valores extremos de uma função em situações cotidianas. Assim, após se inteirarem da temática apresentada (Escolha do cabo de energia em função da bitola) e definirem metas para sua resolução, o grupo foi introduzido à teoria do valor extremo de uma função por meio do uso da análise da função derivada. Tais máximos e mínimos seriam utilizados para responder à questão: *Para montagem de uma extensão elétrica (para uso residencial) quais seriam as bitolas dos cabos elétricos que apresentariam, respectivamente, a menor e a maior queda de tensão?*

Os alunos já conheciam regras de derivação, assim ao se depararem com a necessidade de análise da derivada, interpretantes imediatos foram imperceptíveis. Portanto, diferentemente da atividade de aquecimento, na atividade de acompanhamento, especificamente na atividade de exploração de um modelo o que pôde ser evidenciado foram signos interpretantes dinâmicos. Tais interpretantes estão relacionados, principalmente, às ações dos estudantes com relação aos cálculos e análises necessárias para a resolução do problema.

Esta atividade também porporcionou as alunos a análise de diferentes representações (algébrica e gráfica, por exemplo) para uma mesma situação permitindo-lhes identificar semelhanças estruturais e diferenças entre e dentre tais representações.

Por fim, na terceira atividade da sequência de atividades, *Perda de água na distribuição na cidade de Uraí-PR,* o problema definido pelo grupo foi elaborar um modelo que possibilite a previsão da perda de água no decorrer dos anos na cidade.

O desenvolvimento dessa atividade requereu a aplicação do modelo matemático em diferentes contextos. Nesta atividade, para obtenção de um dos modelos matemáticos, os alunos fizeram uso de uma função exponencial de comportamento assintótico, similarmente ao que utilizaram na atividade de aquecimento.

Todavia, o modelo construído nesta atividade de acompanhamento requereu adaptações em relação ao modelo assintótico que já conheciam, possibilitando-lhes novo entendimento e refinamento de linguagem, embora analogias pudessem, em alguns momentos, proporcionar a produção de signos interpretantes mais conclusivos com relação ao valor mínimo de uma função. Neste sentido, interpretante final nesta atividade pode ser identificado com relação a um valor extremo de uma função. De fato, nesta atividade os alunos apresentam fortes indícios de que sabem o que são pontos extremos de uma função e, do ponto de vista do problema em estudo, são capazes de explicar o significado do ponto de inflexão.

A partir da análise desta atividade podemos inferir, ainda, que o uso da matemática que os alunos fizeram durante o desenvolvimento da atividade está ancorado em suas experiências anteriores, ou conhecimentos colaterais como definido por Peirce (2015), seja em suas experiências com os conceitos e ferramentas da matemática, ou em suas experiências práticas com modelagem matemática (ALMEIDA, 2018).

Os signos interpretantes produzidos pelos alunos no decorrer do desenvolvimento das atividades de modelagem matemática sugerem que o desenvolvimento de sequências de atividades de modelagem pode prover os alunos de experiência para lidar com a construção e interpretação de modelos e proporcionar-lhes o contato de diferentes nuances de um objeto matemático, particularmente da derivada e seu uso para analisar fenômenos com relação à existência de valores de máximo e de mínimo.

Referências

ALMEIDA, L. M. W. Um olhar semiótico sobre modelos e modelagem: metáforas como foco de análise. **Zetetiké. FE-Unicamp**, v. 18, número temático, p. 387-414, 2010.

ALMEIDA, L. M. W. Considerations on the use of mathematics in modeling activities. **ZDM**, v. 50, p. 19-30, 2018.

ALMEIDA, L. M. W.; BRITO, D. S. Atividades de Modelagem Matemática: que sentido os alunos podem lhe atribuir?. **Ciência e Educação (UNESP)**, 11, 1-16, 2005.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P. A Ação dos Signos e o Conhecimento dos Alunos em Atividades de Modelagem Matemática. **Boletim de Educação Matemática**, v. 31, n. 57, p. 202-219, abr., 2017.

ALMEIDA, L. M. W.; SILVA, K. A. P.; VERONEZ, M. R. D. Sobre a geração e interpretação de signos em atividades de modelagem matemática. *In*: VI SEMINÁRIO INTERNACIONAL DE PESQUISA EM EDUCAÇÃO MATEMÁTICA - VI SIPEM, 2015, Pirenópolis. **Anais do VI SIPEM**. Rio de Janeiro: SBEM, 2015. v. 1. p. 1-12.

ÄRLEBÄCK, J.; DOERR, H. Moving beyond a single modelling activity. In: **Mathematical Modelling in Education Research and Practice**. Springer International Publishing, p. 293-303, 2015.

ÄRLEBÄCK, J.; DOERR, H. Students' interpretations and reasoning about phenomena with negative rates of change throughout a model development sequence. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 187-200, 2018.

BOGDAN, R. C.; BIKLEN, S. K. **Qualitative research for education**: An introduction to theories and methods*.* New York: Pearson Education, 2003.

CARREIRA, S.; BAIOA, A. M. Mathematical modelling with hands-on experimental tasks: On the student's sense of credibility. **ZDM**, v. 50, n. 1-2, p. 201-215, 2018.

DRIGO, M. O. Comunicação e cognição: semiose na mente humana. In: **Comunicação e cognição**: semiose na mente humana. Sulinas, 2007.

LESH, R.; CRAMER, K.; DOERR, H.; POST, T.; ZAWOJEWSKI, J. Model Development Sequences. In: Richard Lesh & Helen Doerr, (Eds.), **Beyond constructivism**: Models and modeling perspectives on mathematics problem solving, learning, and teaching. Mahwah: Erlbaum, 2003.

NÖTH, W. **Panorama da Semiótica**: de Platão a Peirce. São Paulo: Annablume, 2008.

PEIRCE, C. S. **Semiótica e filosofia**. Editora Cultrix, 1972.

PEIRCE, C. S. **Semiótica**. 3. ed. São Paulo: Perspectiva, 2015.

SANTAELLA, L. **Semiótica aplicada**. São Paulo: Thomson Learning, 2012.

Enviado em: 14/junho/2019 | Aprovado em: 28/julho/2019