Revista Eletrônica de Educação, v. 5, n. 2, nov. 2011. *Resenhas*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação

RESENHA

O RIGOR E A INTUIÇÃO NO ENSINO DE CÁLCULO E DE ANÁLISE

[REIS, F. S. **A Tensão entre Rigor e Intuição no Ensino de Cálculo e Análise**: A Visão de Professores-Pesquisadores e Autores de Livros Didáticos. 2001. 302f. Tese (Doutorado) – Programa de Pós-Graduação em Educação, UNICAMP, Campinas, 2001.]

Silvio César Otero-Garcia[1]
Universidade Estadual Paulista "Júlio de Mesquita Filho" – UNESP/Rio Claro
Programa de Pós-Graduação em Educação Matemática

Frederico da Silva Reis é graduado em Matemática pela UFES (Universidade Federal do Espírito Santo), mestre em Matemática pela UFRJ (Universidade Federal do Rio de Janeiro) e doutor em Educação pela UNICAMP (Universidade Estadual de Campinas). Atualmente é professor associado na UFOP (Universidade Federal de Ouro Preto). Em sua tese, *A Tensão entre o Rigor e a Intuição no Ensino de Cálculo e Análise*, é discutida, por meio de uma análise de manuais didáticos e de entrevistas semi-estruturadas com autores de livros de cálculo e de análise, a tensão de que fala seu título. Além disso, nela é apresentada uma revisão bibliográfica de estudos sobre questões relacionadas com o ensino dessas disciplinas, bem como sobre o desenvolvimento histórico do Cálculo e da Análise. Nesta resenha, procuramos trazer um apanhado geral da tese de Reis com a maior quantidade possível de detalhes, sem que isso tornasse nossa exposição excessivamente longa.

A revisão bibliográfica de Reis sobre o ensino de cálculo e de análise está centrada em quatro grupos de trabalhos: os do aporte teórico do *Modelo dos Campos Semânticos*; os do Professor Roberto Baldino; os apresentados no 8º. *International Congress on Mathematical Education*; e os realizados dentro da linha do *Advanced Mathematical Thinking*.

Sobre o primeiro grupo, Reis destaca duas vertentes de caracterização do pensamento diferencial que dialogam com os seus objetivos: o *pensamento intuitivo* (presente na busca pela produção de significados) e o *pensamento rigoroso* (presente na busca por justificações de afirmações).

Nenhum dos trabalhos apresentados no ICME têm relação direta com os objetivos de Reis, entretanto, a pequena quantidade referente ao

[1] Licenciado em Ciências Exatas pela Universidade de São Paulo. Mestre em Educação Matemática pela Universidade Estadual Paulista - UNESP e Doutorando em Educação Matemática pela mesma universidade. silvioce@gmail.com

Revista Eletrônica de Educação, v. 5, n. 2, nov. 2011. *Resenhas.* ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação

ensino de cálculo e de análise mostra que questões relativas a essas duas disciplinas são pouco tratadas e estudadas de um modo geral.

Com respeito às ideias do grupo do *pensamento matemático avançado*, Reis frisa que a maior interlocução que encontrou entre tais trabalhos e sua pesquisa ocorreu na constatação de que a transição do pensamento matemático elementar para o avançado não deve vir necessariamente acompanhada de uma transição do pensamento intuitivo para o rigoroso. Os pesquisadores dessa linha defendem, por exemplo, que atividades intuitivas devam preceder outras com definições e provas formais.

Nos trabalhos do Prof. Baldino contesta-se a postura de se manter o limite como conceito central do ensino do cálculo e da análise e apontam os infinitésimos como alternativa mais coerente. Baldino discute também os erros apresentados pelos alunos no cálculo de integrais indefinidas; o resultado é preocupante: a maioria deles é cometida em função de dificuldades de manipulação algébrica elementar. Para Reis, a grande contribuição dos trabalhos de Baldino para o seu vem da crítica que é feita ao excesso de rigor com que são tratados conceitos de limite, continuidade, derivada e integral; à escassa exploração da aplicabilidade.

Reis volta a tratar da questão dos infinitésimos ao trazer um breve relato do estabelecimento dos fundamentos do Cálculo e do movimento de aritmetização da Análise, bem como as suas consequências para o ensino dessas disciplinas. Por conta do papel preponderante dos limites e da influência da aritmetização da análise, a ordem com que os conceitos do Cálculo se desenvolveram (integral, derivada, limites, números reais), é invertida em seu ensino, além disso, a partir do movimento de aritmetização da Análise, tudo que pudesse ser provado, deveria ser provado. O pesquisador acredita que essas ideias sintetizam muito bem como essas transformações repercutiram nas questões relativas ao rigor e intuição, notadamente no ensino.

Mas, o que há de intuitivo no ensino de cálculo? Reis apresenta cinco categorias de intuição e as exemplifica: *empírica* (quando infere-se, dadas as definições iniciais e exemplos, que a derivada de x^n é nx^{n-1}), a *objetiva* (a noção de que o limite da soma de duas funções é igual à soma do limite das funções), a *lógica* (quando se conclui logicamente que se toda função derivável num dado ponto é contínua nele, então, se uma função não é contínua num certo ponto, não poderá ser derivável nele), a *categórica* (a "demonstração" do Teorema do Valor Médio por meio de um gráfico) e a *conceitual* (a compreensão da derivada como uma taxa de variação aplicada aos conceitos da física, é um exemplo). Reis afirma que a intuição está sempre presente no processo de produção do conhecimento matemático que, numa fase seguinte, será aperfeiçoado e tornado mais rigoroso, assim sendo, deve obrigatoriamente estar presente no ensino tanto do cálculo como da análise.

Então, o que há de rigoroso no ensino de análise? Para responder a essa questão, Reis apresenta uma crítica à definição rigorosa de

Revista Eletrônica de Educação, v. 5, n. 2, nov. 2011. *Resenhas.* ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação

continuidade, que nada mais é que uma metáfora, já que apenas caracteriza uma correspondência entre dois elementos, não contemplando a essência de continuidade de uma função concebida por Euler em termos do movimento livre de uma mão através do plano. Além disso, a definição formal considera a linha de um gráfico como um conjunto de pontos, e, desse modo, explicita uma visão discreta e não-holística. Reis considera essas observações extremamente relevantes do ponto de vista pedagógico, já que por meio delas são questionadas as vantagens que esse rigor traz para o ensino. Considerando-se toda a problemática e que o máximo de rigor é obtido quando se chega ao último ponto possível de se chegar, Reis indaga: o que significa se pautar pelo rigor no ensino de análise? O que deve ser levado em conta é que o rigor se dá em níveis e os professores devem avaliar qual é o conveniente em cada situação, sem que se perca, no entanto, o sentido e a real compreensão das ideias matemáticas. Dessa forma, para Reis, é inadmissível pautar o ensino do cálculo somente na intuição e o da análise no rigor.

Agora, o excesso de rigor existente nos cursos de análise teria relação com os professores que a ministram? Reis diz que na maioria dos cursos, os professores que ministram as chamadas disciplinas específicas têm toda sua formação acadêmica em matemática, e o exercício do magistério requer um aprendizado específico da profissão que esses professores não têm. Então questiona se muitos dos problemas da educação universitária brasileira não teriam relação com essa falta de *saber pedagógico* por parte de seus docentes. Para Reis, os professores universitários reproduzem em suas aulas a sua formação técnico-formal que também será reproduzida depois pelos professores formados por esses.

A tensão entre o rigor e a intuição e as tendências e problemáticas envolvendo o ensino do cálculo e da análise perpassam também os chamados currículos públicos dessas disciplinas e os materiais didáticos utilizados. Partindo disso, Reis analisa alguns dos principais livros adotados como bibliografia. A análise é pautada nos conceitos de limite e continuidade.

Sobre o livro de Leithold, Reis diz que os conceitos de limite e continuidade são inicialmente tratados sob um ponto de vista intuitivo e depois definidos em termos do par $\varepsilon - \delta$, que é utilizado na demonstração de teoremas. Reis critica o excesso de demonstrações deixadas como exercício e a concepção do autor de que essa postura serve de motivação para que o aluno perceba se tem um bom domínio das seções precedentes. Para ele, o livro de Leithold tem uma grande preocupação com o conhecimento procedimental que vem sob um disfarce de conhecimento conceitual.

Swokowski também aborda limites e continuidade primeiramente sob um viés intuitivo, porém, ao contrário de Leithold, traz uma bagagem de exercícios mais coerente com a obra. Reis questiona se a preferência que os alunos costumam ter por esse livro não seria decorrente da impressão que eles têm de terem aprendido o conteúdo ao conseguirem resolver os exercícios.

Revista Eletrônica de Educação, v. 5, n. 2, nov. 2011. *Resenhas.* ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação

Questiona ainda se essa visão não é também a dos professores e autores de livros, que acabam por valorizar o procedimental ante o conceitual.

O livro de Fleming e Gonçalves possui linguagem clara e acessível. Como os demais, explora limites e continuidade inicialmente sob um viés intuitivo. Entretanto, as autoras dão um tratamento amplo e completo a esses pontos, com uma abordagem relativamente rigorosa, especialmente nas preposições e propriedades iniciais. Com isso, os alunos passam a considerar o assunto “impossível de ser entendido” e acabam se focando no cálculo dos limites, o que caracterizaria um perigoso caminho rumo ao procedimental.

O destaque dado por Reis ao livro de Edwards e Penney, que o diferencia dos demais, é o fato da obra apresentar a derivada antes do conceito de limite por meio de problemas de tangentes. Reis considera tal livro inovador não só por isso, mas também por conta dos projetos complementares que apresenta, e da sua abordagem exploratória e problematizadora dos conteúdos, muitas vezes sugerindo o uso de novas tecnologias.

Os livros de cálculo de Ávila possuem particularidades. O seu *Cálculo I*, ao contrário do demais já citados, não define o conceito de limites através do par $\varepsilon - \delta$, a ideia aparece através de problemas com reta tangente e a exposição é concisa. Reis considera tal tratamento comparativamente mais adequado. *Introdução ao Cálculo* é uma versão simplificada do *Cálculo I* e assim como Edwards e Penney, traz uma exposição inicial de derivada antes de introduzir limites e continuidade e é destinado a alunos que ingressam no ensino superior com deficiências em matemática. Por fim, o *Introdução às Funções e às Derivadas* é um dos raros livros que se dedicam ao ensino de derivada no ensino médio. Ávila acredita que a derivada lança luz sobre o conceito de função e torna conceitos da física mais claros e fáceis.

O livro de análise de Ávila traz limites e continuidade na sequência habitual, com a utilização de noções topológicas. Reis destaca as notas complementares ao fim de cada capítulo. Apesar de ver isso como um avanço, reitera que essa posição de colocar os aspectos mais procedimentais (parte inicial) separados dos histórico-conceituais (notas) retrata certa concepção dicotômica. Já Rudin primeiro define limites e continuidade em termos de espaços métricos para depois reformulá-la em termos de sucessões. O livro é escasso em figuras e gráficos, não apresenta notas históricas e mostra uma preocupação em apresentar uma análise “aritmetizada”. A apresentação dos conteúdos, de modo geral, é formal e rigorosa.

Como em Rudin, no livro de Figueiredo há escassez de gráficos ou figuras, entretanto, como em Ávila, há muitas notas históricas, nesse caso dispostas ao longo do texto. Limites e continuidade são apresentados através de limites laterais que utilizam conceitos de convergência de sucessões numéricas. Figueiredo justifica suas escolhas, o que mostra uma preocupação com a formação de um leitor crítico e reflexivo, características essas, acredita Reis, essenciais para todo professor. A definição de limite com o par $\varepsilon - \delta$

Revista Eletrônica de Educação, v. 5, n. 2, nov. 2011. *Resenhas.* ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação

também é trazida, entretanto, sob a forma de teorema, o que parece demonstrar uma valorização dos aspectos conceituais ante os procedimentais. Figueiredo, em seu prefácio, diz adotar o rigor que a Análise ganhou no decorrer do século XX. Reis diz que, embora tal rigor tenha importância inquestionável, não se pode dizer o mesmo sobre um ensino pautado nele, sobretudo para o professor de matemática. De um modo geral, o texto de Figueiredo é mais narrativo e discursivo, apresenta muitos conceitos e aplicações, o que o distancia da abordagem de Rudin.

O texto de Lima, por sua vez, com sua ausência total de referências históricas e grandes preocupações com a estrutura lógica, parece, segundo Reis, deixá-lo próximo de certo modo do livro de Rudin. Limites e continuidade são apresentados de modo tradicional, sempre utilizando noções topológicas, presentes no livro como um todo.

Por fim, o livro de Caraça, destaca Reis, não é exatamente um livro didático de análise, entretanto, possui alguns elementos muito interessantes como a abordagem dos limites ligada à ideia dos infinitésimos, a preocupação em se apresentar os contextos sócio-históricos nos quais foram desenvolvidos os conceitos e a exploração da dimensão intuitivo-geométrica. Para Reis, a abordagem de Caraça privilegia o conceitual ante o procedimental o que seria fundamental para a formação matemática do professor.

Os resultados da análise que Reis fez das entrevistas com Roberto Baldino, Geraldo Ávila, Djairo de Figueiredo e Elon Lima foram agrupados em duas categorias: os saberes do professor de cálculo e de análise, subdivididos em *específico*, *pedagógico* e *curricular*; e a relação entre o rigor e a intuição no ensino de cálculo e de análise.

Reis destaca dois tipos de saber *específico* que emergiram da fala dos professores entrevistados: o *histórico* (refere-se a acontecimentos históricos julgados pelos entrevistados como fundamentais em si e pelas suas relações com o ensino e currículo) e o *epistemológico* (relativo à natureza do pensamento *diferencial* e *analítico*). Baldino acredita que o *saber histórico* pode ser utilizado como uma espécie de advertência, visto que ao se conhecer a evolução de um dado conteúdo, pode-se evitar muitos problemas relacionados ao seu ensino. Já sobre o *saber epistemológico*, Reis relata a dificuldade existente em se discutir e caracterizar os pensamentos *diferencial* e *analítico*: o domínio conceitual dessas duas formas é pouco conhecido ou explorado. O *pensamento diferencial* é distinguido do algébrico por introduzir a questão da decomposição de grandezas. O *pensamento analítico* se resume em “se supor uma coisa, tomar aquilo como hipótese e fazer a análise daquilo”. Um fato que Reis marca sobre esses saberes epistemológicos é a necessidade de não se corresponder o *diferencial* com a *intuição* e o *analítico* com o *rigor*. Baldino e Ávila frisaram que o pensamento analítico está presente na Matemática muito antes do Cálculo ter se tornado rigoroso. O rigor foi necessário para o seu desenvolvimento, mas a identificação desses dois entes não é completa.

Revista Eletrônica de Educação, v. 5, n. 2, nov. 2011. *Resenhas*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação

O *saber curricular* é o saber científico transposto didaticamente. Dois saberes curriculares referentes ao ensino de cálculo e de análise emergiram das entrevistas: um relativo aos programas e o outro aos materiais didáticos. Baldino destaca a confusão existente entre os programas de cálculo e de análise, nítida nos cursos onde a abordagem formalista é preponderante. Essa visão estaria ligada à supervalorização da dimensão procedimental; vista como a única capaz de garantir a validade das proposições. Ávila também acredita que as disciplinas de cálculo não devam ser como disciplinas de análise; esta deve dar um tratamento rigoroso às ideias e conceitos daquela. Djairo, por outro lado, acredita que o ensino de análise não precisa ser marcadamente rigoroso: nem tudo precisa ser demonstrado. Nesse ponto Reis destaca que a primazia das demonstrações é uma característica sintomática do ensino dito rigoroso. Sobre os materiais didáticos, para Djairo, os livros de cálculo de Ávila são boas alternativas aos estadunidenses, quanto aos de análise, ele indica o seu próprio livro. Elon critica o livro de cálculo de Johnson e Kiokemeister pelo seu excesso de formalismo. Ávila também faz críticas a essa obra e ressalta que uma mudança de direção no ensino de cálculo só ocorreu após a adoção de Serge Lang, autor que deixa o rigor para os cursos de análise. O livro de cálculo de Spivak é considerado por Ávila e Baldino uma boa referência para um curso de análise. Baldino também indica os livros de Elon e os de Laurent Schartz; com relação ao Cálculo, Swokowski e Leithold.

No que concerne ao *conhecimento pedagógico*, que é aquele que “diz respeito às diferentes formas de representar e explorar os conteúdos de modo a torná-los compreensíveis e significativos para os alunos”, o tema que se sobressaiu nas entrevistas foi a abordagem didático-pedagógica dada às aplicações da matemática. Baldino, Djairo e Ávila destacaram o papel motivador das aplicações no cálculo, campo muito fértil para trabalhar com esse aspecto. Para Ávila, a física é uma boa geradora de exemplos, tanto que o ensino de cálculo e o ensino de física deveriam caminhar juntos. Baldino relata que estudantes de matemática, em geral, não se interessam por aplicações. Elon foi o único a trazer uma tônica diferente. Para ele, o ensino tanto do cálculo quanto o de análise deve se apoiar num tripé: conceituação, manipulação e aplicações, com determinados equilíbrios e ênfases dependendo do conteúdo e do nível de ensino.

Reis procura levantar ainda uma visão geral sobre o ensino de cálculo e de análise de cada depoente. Para Baldino existe uma grande diferença entre o que se ensina e o que o aluno aprende: o real compromisso da universidade é com seu próprio funcionamento. Para Ávila, o professor de cálculo deve se comportar como um *colega mais velho*, entretanto, na prática a relação professor-aluno é completamente diferente e não deixa espaço para uma tentativa de crescimento conjunto. Elon e Djairo se assemelham por apresentarem uma preocupação ética na prática pedagógica. Para Djairo, no cálculo e na análise, muitas vezes é necessário que se “queime algumas etapas" para que se chegue rapidamente nos tópicos considerados essenciais, mas, para isso, é necessária uma atitude honesta perante o aluno. Para Elon, o professor deve se preocupar em ter uma atitude equilibrada de modo a se em algum momento optar por não dizer *toda* uma verdade, nunca chegue a mentir.

A segunda categoria que emergiu das entrevistas feitas por Reis foi a relação tensional entre o rigor e a intuição no ensino de cálculo e de análise. Para apresentar essa etapa, Reis examina alguns aspectos específicos da prática pedagógica com relação a essa tensão, analisa o impacto da chamada "ortodoxia epsilônica" na abordagem de limites e continuidade no ensino dessas disciplinas e destaca novas perspectivas para o cálculo e para a análise na formação de professores de matemática.

Embora Reis não tenha questionado os entrevistados com relação à maneira como enxergavam questões relativas à intuição e ao rigor, ele diz que foi possível fazer observações indiretas. Baldino questiona a necessidade e validade de se demonstrar resultados que os alunos já aceitaram de antemão por outras vias. Por exemplo, num curso de física não haveria necessidade de se demonstrar que num intervalo onde a derivada de uma função se anula o gráfico da mesma é constante, pois para esse estudante é absolutamente natural interpretar isso em termos de velocidade. Elon parece concordar com essa ideia de níveis de rigor. Para ele, apresentar uma demonstração através de um gráfico é algo bastante aceitável. Elon acredita que o professor não deve ir além do que os alunos necessitam; muitas vezes não há necessidade de se demonstrar determinados fatos que os alunos já entenderam com outras justificativas. Para Reis, o conceito de rigor de Baldino e de Elon não é, assim, absoluto; varia de contexto para contexto. A existência de diferentes níveis de rigor também é defendida por Djairo. Já Ávila parece ver intuição e rigor de forma dicotômica, mas considera positiva uma abordagem que contemple aspectos intuitivos.

A ortodoxia epsilônica no ensino de limites e continuidade é vista de uma maneira um pouco radical por Baldino que acredita que a questão dos limites deve ser desviada para o curso seguir de forma direta para derivadas, integrais e aplicações. Em certo sentido, Ávila concorda com ele, já que vê o ensino de limites por ε e δ como algo pedagogicamente inalcançável. Entretanto, acredita que tal abordagem não deva ser completamente abolida, podendo ser retomada após o aluno ter adquirido maturidade com os conceitos de derivada. A justificativa que Ávila apresenta é histórica: o desenvolvimento da teoria dos limites só se deu após a concepção da noção de derivada, reta tangente, velocidade instantânea. Elon corrobora com Ávila e Baldino.

Destarte, Reis diz que todos os depoentes mostraram-se insatisfeitos com a abordagem rigorosa dada ao cálculo. Baldino defende que o *Cálculo Diferencial e Integral* seja substituído pelo *Cálculo Infinitesimal* e a *Análise Matemática* pela *Análise não-Standard*. Ávila propõe soluções técnicas; o número de alunos por turma deveria diminuir, a disciplina deveria sempre

Revista Eletrônica de Educação, v. 5, n. 2, nov. 2011. *Resenhas*. ISSN 1982-7199.
Programa de Pós-Graduação em Educação

contar com o auxílio de monitores e o ensino centrado numa metodologia de resolução de problemas. Essa postura é a mesma de Djairo, que, no entanto, também considera importante o uso de computadores. Elon defende que as ideias do cálculo sejam significadas através de múltiplos recursos.

A questão da importância da disciplina de análise na formação do professor também é tocada em Reis. A partir das entrevistas o autor observa que, por um lado, essa disciplina é vista como fundamental para a formação de professores, porém, por outro, não há concordância com relação à maneira como deveria ser ensinada de modo a contribuir para essa formação. Para o autor, um curso de análise deveria ser desenvolvido de acordo com as condições intelectuais dos alunos e de seus conhecimentos prévios e ressalta que a abordagem excessivamente rigorosa dessa disciplina deve ser superada.

Em suas *Considerações finais*, Reis torna a tratar de questões já discutidas anteriormente e levanta algumas novas posições, destacamos: 1) o rigor acadêmico dominante no mundo das publicações e apresentações de trabalho não deve ser diretamente transposto para o ensino, deve-se dar ao rigor um tratamento compatível com o contexto de ensino; 2) intuição e rigor são dimensões interdependentes, um não existe sem o outro, assim sendo, não há ensino de cálculo sem rigor e nem de análise sem intuição; 3) o curso de análise desempenha o papel de desencadeador da autonomia intelectual do futuro professor e deve ser desenvolvido de acordo com as condições intelectuais dos alunos, seus conhecimentos prévios e suas imagens conceituais relacionadas ao conteúdo.

Palavras-Chave: Educação Matemática no Ensino Superior. Ensino de Análise. Ensino de Cálculo Diferencial e Integral. Formação Matemática do Professor.

Key words: Mathematics Teaching in Undergraduate Courses. Analysis Teaching. Differential and Integral Calculus Teaching. Mathematics Teacher Education.

Enviado em: 11/07/2011

Aceito em: 10/10/2011