Artigo

O número negativo na proposição de ensino davydoviana: necessidades para a sua introdução

The negative number in Davydov's teaching proposition: necessities for its introduction

Lucas Sid Moneretto Búrigo[1], **Ademir Damazio**[2]

Universidade do Extremo Sul Catarinense, UNESC, Criciúma-SC, Brasil

Resumo

As dificuldades apresentadas por estudantes brasileiros na apropriação do número negativo relatadas em pesquisas contribuíram para a elaboração desse artigo. Preocupados com tais dificuldades, recorremos à proposição davydoviana que é objeto desse estudo. O problema de pesquisa é: quais são as necessidades criadas nas tarefas particulares da organização de ensino davydoviano para a introdução do conceito de número negativo, em situação escolar? Trata-se de uma pesquisa qualitativa na modalidade bibliográfica cuja fonte de análise são quatro tarefas presentes no livro didático do estudante pertencente à proposição davydoviana. O processo de análise se desenvolveu por meio da categoria necessidade: de ordem conceitual e pedagógica. A pesquisa evidencia que a necessidade do estudo dos números negativos decorre de que apenas eles possibilitam a resolução de alguns casos de subtração e equação. Para propiciar o significado de oposto ao número negativo, a necessidade principal é a passagem das grandezas escalares para a vetorial.
Palavras-chave: Proposição davydoviana. Números negativos. Necessidades conceituais.

Abstract

The difficulties presented by Brazilian students in the appropriation of the negative number reported in surveys contributed to this article preparation. Concerned about these difficulties, we turned to Davydov's proposition, which is the subject of this study. The research problem is: what are the needs created in the particular tasks of Davydov's educational organization for the introduction of the negative numbers concept, in school situation? It is a qualitative research method in the literature whose source analysis are four tasks presented in the student textbook belonging to Davydov's proposition. The review process was developed through necessity category: conceptual and pedagogical. The research shows that the need to study the negative numbers is based on the fact that only they enable the resolution of some cases of subtraction and equation. To provide the meaning of opposite to the negative number, the main need is the change from scalar quantities to the vector one.
Keywords: Proposition davydovian. Negative numbers. Conceptual necessities.

Introdução

Em se tratando do ensino da Matemática no contexto educacional brasileiro, muitos conceitos são apontados como indicadores de dificuldades por parte dos estudantes. Dentre eles, o conceito de número negativo tem originado estudos sobre

1 Mestre em Educação pela Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). Professor da Universidade do Extremo Sul Catarinense. E-mail: lucassid@hotmail.com

2 Doutor em Educação pela Universidade Federal de Santa Catarina (UFSC). Professor do Programa de Pós-Graduação em Educação da Universidade do Extremo Sul Catarinense (UNESC). E-mail: add@unesc.net

 ISSN 1982-7199 | DOI: http://dx.doi.org/10.14244/198271991455

sua aprendizagem e seu ensino. A investigação de Amorim (2012) é indicadora do estado da arte revelado em pesquisa que trata dessa temática no período de 2001 a 2010. Silva (2012) identificou as elaborações dos estudantes ao desenvolverem atividades orientadoras de ensino com os números inteiros, mais especificamente com os negativos. Damazio (2001) investigou o processo de ensino no ambiente escolar, com atenção ao modo de organização das tarefas de estudo por parte de um professor, que articulou situações do cotidiano de base empírica com o teor teórico do conceito de número inteiro relativo. Esses três estudos, entre tantos passíveis de indicação, são elucidativos para a problematização e pertinência da investigação em foco por duas razões. Uma delas diz respeito às evidências da complexidade desse conceito no âmbito escolar. A outra, por apontar que mesmo as pesquisas com teores propositivos inovadores se apresentam com conteúdo idêntico àquelas propostas com as quais expressam discordâncias, uma vez que trazem em sua essência uma base conceitual empírica e, por consequência, desenvolvem o mesmo tipo de pensamento nos estudantes. Nota-se tal incoerência ao trazerem em sua essência uma base conceitual empírica que, por consequência, desenvolve o mesmo tipo de pensamento nos estudantes. Como diz Davýdov (1982), há uma mudança de método de ensino, mas o conteúdo do conceito permanece o mesmo.

Se as investigações acadêmicas e científicas evidenciam um panorama pedagógico que não favorece as apropriações conceituais do conceito matemático em referência, a mesma preocupação se expressa no documento que serve de orientação para a organização do ensino brasileiro, os Parâmetros Curriculares Nacionais (PCNs), quando afirma: "[...] na escola, o estudo dos números inteiros costuma ser cercado de dificuldades e os resultados, no que se refere a sua aprendizagem ao longo do Ensino Fundamental, têm sido bastante insatisfatório." (BRASIL, 1998, p. 97).

As fragilidades indicadas, até o momento, remetem-nos ao estudo de outras possibilidades educativas. Por isso, no presente estudo, a centralidade é o ensino que contrapõe à insistência no conteúdo empírico do conceito de número negativo, que permanece mesmo naquelas propostas que se dizem inovadoras como explicitaram Amorim (2012), Silva (2012) e Damazio (2001). Para tanto, a referência é a proposição de ensino de Davýdov e colaboradores para a disciplina de Matemática, resultante de pesquisas desenvolvidas por mais de vinte e cinco anos. Davídov (1988) mostrou-se propenso à organização do ensino, com vistas ao desenvolvimento psíquico dos estudantes, diferentemente daquele que era realizado pelos sistemas de ensino presentes na Rússia. Seu pressuposto é de que, desde a passagem da pré-escola para a escola, o ensino propicie a apropriação dos conceitos científicos pelos estudantes, para que eles possam se desenvolver em condições de entender o mundo com base teórica, em vez de empírica.

Davýdov (1982) entende que o estudante, ao ingressar na escola, encontra uma organização de ensino totalmente distinta – tanto em método quanto em conteúdo – daquela que vivenciara na pré-escola ou na situação de aprendizagem cotidiana. Sua justificativa para tal pressuposto é que, ao adentrar a escola, o estudante se insere em um novo lugar no contexto social, o qual marcará o seu desenvolvimento propiciado por uma nova atividade principal: atividade de estudo que, aos poucos, se sobrepõe ao que até então predominava, o jogo. Davídov e Slobódchikov (1991) entendem que o estudante só desenvolve a atividade de estudo, por meio da assimilação dos conceitos científicos quando experimenta uma necessidade interna e uma motivação

 ISSN 1982-7199 | DOI: http://dx.doi.org/10.14244/198271991455

para tal. São as necessidades e os motivos que orientam os estudantes no processo de apropriação do conhecimento, o qual gera o desenvolvimento humano em nível de pensamento teórico. O modo de organização do ensino proposto por Davídov (1988) é composto por 1) 'tarefas de estudos', que são cumpridas por 2) seis 'ações de estudo', cada qual desenvolvida por um conjunto de 3) 'tarefas particulares' que, por sua vez, requerem procedimentos ou 'operações'. Para Davídov e Slobódchikov (1991), as tarefas de estudo permitem a análise, pelos estudantes, das condições de origem dos conhecimentos, bem como o domínio dos seus procedimentos generalizadores. Davídov (1988, p. 209) define um sistema de tarefas de estudos em relação à Matemática para o ensino fundamental, qual seja:

> 1) introdução dos alunos na esfera das relações entre grandezas: formação do conceito abstrato de grandeza matemática;
> 2) demonstração, para as crianças, da relação múltipla das grandezas como forma geral do número: formação do conceito abstrato de número e da compreensão da inter-relação fundamental entre seus componentes (o número é derivado da relação múltipla das grandezas);
> 3) introdução sucessiva dos estudantes na área dos diferentes tipos particulares de números (naturais, quebrados, negativos): formação dos conceitos sobre estes números como uma das manifestações da relação múltipla geral das grandezas em determinadas condições concretas;
> 4) demonstração aos alunos do caráter unívoco da estrutura da operação matemática (se se conhece o valor dos elementos da operação se pode determinar univocamente o valor do terceiro elemento): formação da compreensão sobre a inter-relação dos elementos das ações aritméticas fundamentais.
>
> Para cada uma dessas tarefas, destaca as seguintes ações de estudo:
>
> 1) transformação dos dados da tarefa com o fim de revelar a relação universal do objeto de estudo;
> 2) modelação da relação diferenciada em forma objetal, gráfica ou por meio de letras;
> 3) transformação do modelo da relação para estudar suas propriedades em 'forma pura';
> 4) construção do sistema de tarefas particulares para resolver por um procedimento geral;
> 5) controle sobre o cumprimento das ações anteriores;
> 6) avaliação da assimilação do procedimento geral como resultado da solução da tarefa de estudo dada. (DAVÍDOV, 1988, p. 181).

No presente estudo, o foco é para as tarefas particulares pertinentes às duas primeiras ações referentes ao conceito de número negativo presentes no livro didático do sexto ano escolar (ГОРБОВ et al., 2007). O pressuposto é de que nelas se revelam as necessidades de ordem conceitual e pedagógica que orientam e motivam os estudantes ao desenvolvimento da atividade de estudo quando, no âmbito escolar, a base de estudo e aprendizagem é o referido conceito matemático.

É nesse contexto que emerge o problema de pesquisa: quais são as necessidades criadas nas tarefas particulares da organização de ensino davydoviano para a introdução do conceito de número negativo em situação escolar? Isso leva ao objetivo de identificar e analisar as necessidades e suas características de ordem conceitual e pedagógica que movem a determinação e elaboração das tarefas peculiares referentes ao ensino do conceito de número negativo. Além disso, requer a atenção para o modo como a relação entre as grandezas – base genética essencial do conceito teórico de número – se apresenta na singularidade numérica, negativo, e se manifesta nas tarefas particulares desenvolvidas pelos estudantes.

O pressuposto que move a análise do objeto de estudo é de que, no modo davydoviano de organização do ensino, as tarefas particulares – referência de análise do presente estudo – se inserem em dois contextos de necessidades. Um deles diz respeito à limitação conceitual dos números até então estudados, os positivos, nos anos anteriores (até o quinto ano). O outro corresponde ao processo de introdução dos números negativos no sexto ano. Uma necessidade, conforme Leontiev (1978), está relacionada com a falta de alguma coisa imprescindível para algo. Ou seja: "quando o organismo está com falta de determinados elementos indispensáveis para a vida, isso se manifesta em que ele exige estes elementos ou, em outras palavras, reclama a satisfação de suas necessidades" (LEONTIEV, 1978, p. 341). Ao abordar os conceitos de atividade e psique, com base em Leontiev, Davídov (1988, p. 254) compreende que a "[...] atividade tem sua peculiar premissa: a necessidade como estado de carência e de estimulação do organismo [...]".

As necessidades são, portanto, a base de análise das tarefas particulares que remetem ao desenvolvimento conceitual do número negativo. Elas foram compreendidas com as seguintes ideias: um estado de carência (DAVÍDOV, 1988) e falta de algo (LEONTIEV, 1978).

No processo de análise com a peculiaridade de uma pesquisa qualitativa, as referências foram tarefas particulares introdutórias do conceito de número negativo, extraídas do livro didático do sexto ano (ГОРБОВ et al., 2007) da proposição davydoviana de ensino. Além disso, foi adotado o livro de orientação ao professor (ГОРБОВ et al., 2006), pois contém detalhes do conceito em desenvolvimento e o seu conteúdo, bem como os procedimentos didáticos de cada uma das tarefas particulares a serem realizadas pelos estudantes.

Dentre as diversas tarefas particulares, foram selecionadas para a análise aquelas que traduzem as necessidades para o processo didático de introdução do conceito de número negativo no sexto ano escolar. Isso requereu o diálogo com estudos referentes aos fundamentos matemáticos (CARAÇA, 2010; WINTERLE, 2000) e, também, de investigações referentes à proposição davydoviana (ROSA, 2012; SOUZA, 2013), por subsidiarem a identificação e a compreensão das necessidades, respectivamente, de cunho conceitual matemático e pedagógico, bem como a articulação entre ambas.

A organização do processo de análise segue o seguinte procedimento: 1) Transcrição na íntegra do enunciado da tarefa, extraído do livro didático (ГОРБОВ et. al., 2007); 2) processo de resolução das tarefas em diálogo com duas categorias: de base conceitual de número negativo e de base pedagógica. A primeira diz respeito às ideias que caracterizam a essencialidade do conceito de número em sua singularidade, o negativo. A segunda, de base pedagógica, refere-se às peculiaridades do processo de organização do ensino do conceito matemático em foco. Em outras palavras, o que leva à elaboração e à execução de uma nova tarefa particular para que o estudante se aproprie das múltiplas inter-relações e das significações do referido conceito matemático.

É nesse âmbito que, a seguir, serão evidenciadas algumas tarefas particulares referentes ao ensino do número negativo, com atenção às necessidades que proporcionam a sua elaboração atrelada ao desenvolvimento conceitual.

Os números negativos na proposição de ensino de Davýdov e colaboradores

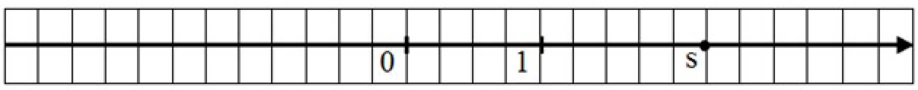
Passaremos a analisar as primeiras tarefas que aproximam o estudante do conceito de número negativo. Basicamente, elas fazem o aluno perceber as limitações dos números até então estudados, os positivos, pois não possibilitam que se expresse o resultado de uma peculiaridade da operação aritmética de subtração, bem como a solução de um caso específico de equação. A primeira tarefa particular (ГОРБОВ et al., 2007, p. 46) coloca o estudante em situação de necessidade de extrapolar seus conhecimentos de números positivos e iniciar seu trânsito pelos negativos. Nesse sentido, traz um elemento que é referência em todos os conceitos, desde o primeiro ano: a reta numérica. Nela, a ideia central é o percurso em sentido oposto aos números positivos. Isso ocorre não por um simples movimento de deslocamento, mas mediado pela operação de subtração, isto é, $a - b$, em que primeiramente o b é menor que o a, mas, por fim, resulta ser maior.

Tarefa 1:

Na reta numérica, conforme a figura 1, identifique o número correspondente ao s.

a) Marque sobre a reta numérica o local correspondente aos números que representam: s - 1; s - 2; s - 3; s - 4.
b) Anote os números marcados (ГОРБОВ et al., 2007).

Figura 1: Subtração sucessiva: geradora da necessidade dos números negativos



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007)

Observa-se, na figura 1, que a unidade de medida é composta de quatro malhas, pois entre o número zero e o 1 constam quatro partes. Isso leva à antecipação de que os números positivos e negativos se apresentarão no campo dos reais – com a ideia de medida – e não somente voltada ao número inteiro. Constata-se, ainda, que cada número na reta numérica corresponde a quatro quartos ($\frac{4}{4}$), por exemplo: $1 = \frac{4}{4}$. Do mesmo modo, o número dois consiste em oito quartos ($\frac{8}{4}$), o três em doze quartos ($\frac{12}{4}$) e, assim, sucessivamente.

Nessa compreensão, ao buscar o número s, observa-se que ele está entre o número dois e o três. Com o auxílio das partes da malha, verifica-se que se trata do número nove quartos ($\frac{9}{4}$). A identificação do número s auxiliará na resolução da questão b.

A situação a da tarefa 1, com o auxílio da reta numérica, tem como objetivo fazer com que se chegue à parte anterior ao zero na mencionada reta destinada aos números negativos. Para isso, recorre-se à operação de subtração para cumprir tal finalidade.

Em outras palavras, o registro das subtrações de uma até quatro unidades de *s* faz com que se percorra o caminho de acordo com o sentido: dos números positivos aos negativos. Isto é, põe os estudantes diante da situação de sair dos números conhecidos, os positivos, e chegar aos desconhecidos, os negativos. Vale destacar que, até então, na proposição davydoviana, não se tinha proposto ainda a ultrapassagem do número zero na reta numérica.

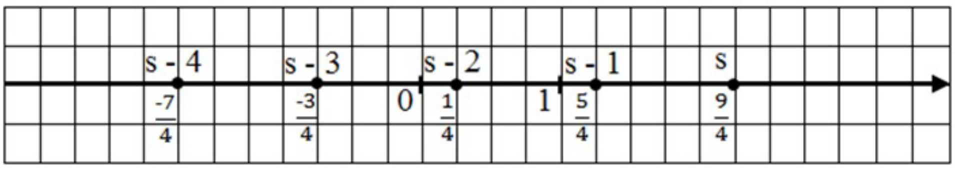
Pelo fato de no contexto do conceito de número faltar o estudo do negativo na proposição davydoviana, verifica-se que a situação *a* cria a necessidade de apropriação conceitual de que há números que se localizam antes do zero, os negativos.

No contexto de criação da referida necessidade conceitual, observa-se que essa necessidade está vinculada à questão pedagógica de elaboração da tarefa pertinente com a finalidade de os estudantes perceberem a possibilidade de outra característica do número: ser negativo ou ser positivo, que se articula com a eliminação das restrições da subtração (só era possível se o subtraendo fosse menor que o minuendo) e o zero como referência para relatividade (ser um número positivo ou negativo).

Em continuação à situação *a*, a próxima questão possui a finalidade de que sejam anotados na reta numérica os números correspondentes às subtrações: s - 1; s - 2; s - 3; s - 4. Nessa circunstância, a subtração se torna um conceito mediador para o surgimento dos números negativos. Caraça (2010, p. 92), ao analisar a subtração entre dois números reais *a* e *b*, considerou a diferença de *a - b* como um “[...] número relativo, que diremos positivo, nulo ou negativo, conforme for $a > b$, $a = b$, $a < b$.”.

Embora o contexto do estudo se volte ao número negativo, a possibilidade de seu surgimento ser subtração sucessiva é a mesma que se apresenta – na proposição davydoviana – no primeiro ano escolar referente à introdução do número zero, conforme indicam os estudos de Rosa (2012) e Souza (2013). Contudo, destacamos que existe diferença em ambos os processos. Isso porque, no primeiro ano escolar, a subtração sucessiva ocorre no contexto da singularidade numérica dos naturais do tipo: 4 - 0 = 4, 4 - 1 = 3, 4 - 2 = 2, 4 - 3 = 1 e 4 - 4 = 0. Por sua vez, no sexto ano, a subtração se refere, além da extrapolação para parte anterior ao zero, à singularidade numérica dos racionais, como, por exemplo, $\frac{9}{4} - 3 = -\frac{3}{4}$.

Figura 2: Representação dos números correspondentes às subtrações sucessivas do s



Fonte: Resolução das situações com base na orientação de Горбов et al. (2007)

Essa tarefa, ao propor subtrações, principalmente nos casos em que o minuendo é menor que o subtraendo, tem um propósito epistemológico articulado com o pedagógico, pois coloca o estudante diante de uma situação desconhecida e aguçada de possibilidade para um conceito ainda não apropriado.

Isso significa dizer que a obtenção dos dois últimos resultados (*s - 3* e *s - 4*) carece de significação conceitual e cria a necessidade de uma tarefa que a explicite ou da intervenção do professor. Em termos conceituais, a necessidade gerada na resolução de parte da referida tarefa é a de que falta algo: o número negativo (LEONTIEV, 1978).

Trata-se, pois, da ausência de um elemento imprescindível para a resolução da operação de subtração quando o minuendo é menor que o subtraendo. Em outras palavras, tal ausência demanda a satisfação da necessidade do estudo de um novo conceito matemático no campo numérico.

No que se refere à subtração e à reta numérica, informamos que tais conceitos são introduzidos na proposição davydoviana no primeiro ano escolar (ROSA, 2012; SOUZA, 2013). Desse modo, constatamos, por meio da tarefa 1, que é a subtração de $a - b$, com b maior que a, realizada com o auxílio da reta numérica, que faz emergir a necessidade do estudo de um novo conceito matemático, o número negativo.

Sendo assim, Davýdov e colaboradores recorrem a um conceito já abordado em sua proposição de ensino para gerar a necessidade de se estudar um novo conceito. Isso significa dizer que a referida organização de ensino almeja que os estudantes atinjam um novo desenvolvimento conceitual. Mas para que isso ocorra, ela recorrerá a conceitos que foram apropriados pelos estudantes e que permitem estudar novos conceitos.

A tarefa 2, conforme veremos a seguir, tem o mesmo propósito da primeira, porém nela se recorre a um outro conceito que também possibilitará gerar a necessidade de se estudar o número negativo.

Tarefa 2:

Selecione a equação que pode ser resolvida e encontre sua solução (ГОРБОВ et al., 2007):

a) x + 178 = 356;
b) x + 356 = 178;
c) x · 178 = 356;
d) x · 356 = 178.

As quatro situações que compõem a tarefa apresentam um teor de avaliação em relação à capacidade dos estudantes de destacar, entre as equações, aquelas cuja resolução ocorre por métodos conhecidos por eles, como também de chegar às soluções apropriadas (ГОРБОВ et al., 2006).

Nas situações *a, c* e *d,* o número a ser atribuído à incógnita x para que se obtenha a igualdade entre os dois membros das equações possui a característica de ser positivo. Contudo, em *b,* qualquer número positivo promove a desigualdade entre ambos os membros da equação. Isso nos possibilita afirmar que tal número não será a solução da equação da situação *b*, pois ele apenas promove a desigualdade entre ambos os membros da equação.

Por tal desigualdade, a situação *b* gera a necessidade de um número que seja distinto do positivo, isto é, o negativo, visto que apenas ele tem a característica de ser somado a um número positivo e o resultado da soma ser menor que o número positivo ao qual foi somado.

Outra vez detectamos a necessidade conceitual de um número com uma característica ainda não estudada na proposição davydoviana, isto é, o negativo, pois somente ele permite que a equação $x + 356 = 178$ tenha como solução: $x = -178$.

No que se refere ao resultado da equação *b*, Горбов et al. (2006) destacam que ele possui apenas um caráter formal (procedimental) e não indica que o estudante ainda tenha alguma noção conceitual dos números negativos. Os autores também não descartam a possibilidade de obtenção errônea do resultado, por exemplo, $x = 178$. Isso mostra que a atenção do estudante não se volta ao entendimento da essência da tarefa; ele apenas a executa formalmente, recorrendo aos procedimentos que domina.

A compreensão do significado da equação da questão *b*, juntamente com a busca de uma maneira de resolvê-la, é algo emergente e uma das exigências imediatas, visto que ela necessita de um conceito, ainda não estudado na proposição de ensino em análise.

A partir do momento que foi criada a necessidade do estudo do número negativo por meio de conceitos apropriados em anos anteriores (subtração e equação), cabe agora satisfazer a referida necessidade. Sendo assim, as duas próximas tarefas particulares estarão direcionadas para a introdução do número negativo.

Para cumprir o propósito de introdução dos números negativos, a terceira tarefa particular apresenta duas características importantes. Uma delas é que promove a transferência do método usado na medição das grandezas escalares (comprimento, área, volume, massa, etc.) para a medição das grandezas vetoriais que são representadas por vetores. A outra estabelece que, ao se medir um vetor, é condição que se tome outro como unidade.

Em se tratando do método usado para a medição de grandezas, vale destacar que para Caraça (2010) a medição consiste na comparação de duas grandezas da mesma espécie: dois comprimentos, dois pesos, dois volumes, entre outras. Nesse processo, destacam-se três fases vinculadas entre si: a escolha da grandeza tomada como unidade; a comparação da unidade com a grandeza a ser medida; e a expressão do resultado dessa comparação por um número.

De um modo similar, Costa (1866) considera que medir uma grandeza corresponde à determinação de quantas vezes ela contém a outra grandeza de mesma espécie tomada como unidade. Existe, então, uma relação dos números com as grandezas, ou seja: "[...] os números são expressões de medida das grandezas." (COSTA, 1866, p. 9).

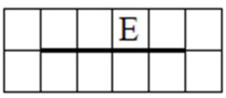
É nesse contexto de medição de grandezas que se inicia o estudo das tarefas particulares referentes à introdução dos números negativos.

Tarefa 3:

a) A partir da unidade E (figura 3), construir um segmento de comprimento:

1) D = E + E; 2) B = E + E + E; 3) C = E + E + E + E.

Figura 3: Comprimento



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

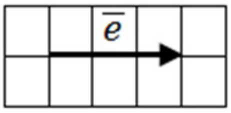
b) Medir o comprimento E, D, B e T, onde T = $\underbrace{E+E+\cdots+E}_{n}$, com a unidade E:

$\frac{E}{E}=\ ;\ \frac{D}{E}=\ ;\ \frac{B}{E}=\ ;\ \frac{T}{E}=\ .$

c) De que outra forma é possível registrar os resultados da medição dessas grandezas?
d) Construa os vetores:

1) $\overline{d} = \overline{e} + \overline{e}$; 2) $\overline{b} = \overline{e} + \overline{e} + \overline{e}$; 3) $\overline{c} = \overline{e} + \overline{e} + \overline{e} + \overline{e}$;

Figura 4: Vetor



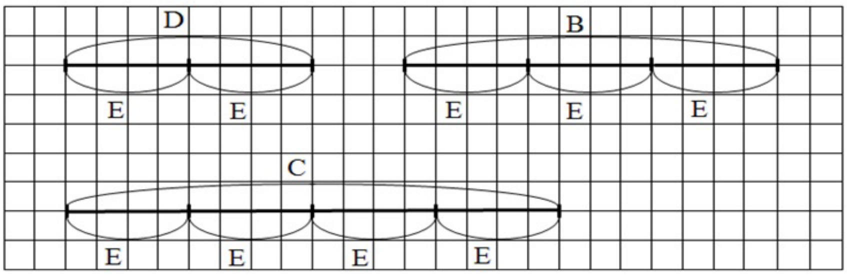
Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007).

e) Seja $\overline{t} = \underbrace{\overline{e}+\overline{e}+\cdots+\overline{e}}_{n}$, como especificar a relação dos vetores $\overline{d}$, $\overline{b}$, $\overline{e}$ e $\overline{t}$ com o vetor $\overline{e}$ (ligados por seu módulo e sentido com o módulo e o sentido do vetor $\overline{e}$? (ГОРБОВ et al., 2007).

Entendemos que as situações *a*, *b* e *c* têm a especificidade de reproduzir o conhecimento apropriado pelos estudantes iniciado no primeiro ano escolar, visto que o estudo do conceito de número na organização de ensino em análise procede da introdução das grandezas (comprimento, área, volume, massa, etc.), pois o número se alicerça na relação entre elas (ROSA, 2012).

A situação a se caracteriza por requerer a construção de segmentos, conforme previsto nos itens 1, 2 e 3, por meio da unidade E. Sendo assim, os segmentos D, B e C possuem, respectivamente, comprimentos iguais a dois, três e quatro segmentos de E (figura 5).

Figura 5: Representação dos segmentos D, B e C



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Nas situações *b* e *c,* ocorre a especificação das relações entre os segmentos E, D, B e T com a unidade E. Cada relação pressupõe a comparação entre dois comprimentos. Para Caraça (2010), a comparação entre duas grandezas da mesma espécie significa realizar a medida de uma das grandezas com a outra tomada como unidade, em que é feita a verificação de quantas vezes a unidade cabe na grandeza a ser medida e tal quantidade de vezes é expressa por um número.

No contexto da comparação de comprimentos que resulta em um número, destacamos que na proposição davydoviana para o primeiro ano escolar, de acordo com Rosa (2012), são adotadas duas fórmulas que retratam o conceito teórico de número: $\frac{A}{B}$ = c e A = cB (A representa a grandeza a ser medida, B a grandeza tomada como unidade, e *c* o número que manifesta a relação entre as duas grandezas).

Ambas as fórmulas traduzem duas relações diferentes entre grandezas da mesma espécie: a de divisibilidade e a de multiplicidade. Na primeira relação, A, ao ser dividido em partes iguais a B, resultará em *c* partes. Enquanto que na segunda, o A será igual a *c* vezes B (ROSA, 2012).

As duas relações mencionadas estão presentes nas situações *b* e *c*. Em *b,* recorre-se à relação de divisibilidade entre E, D, B e T com a unidade E. Tal relação indica em quantas partes, iguais à grandeza E, é possível dividir E, D, B e T. Após a devida comparação, as respectivas relações são expressas da seguinte maneira: $\frac{E}{E} = 1; \frac{D}{E} = 2; \frac{B}{E} = 3; \frac{T}{E} = n.$

Na situação *c,* o processo comparativo entre as grandezas E, D, B e T, tomado E como unidade, expressa a relação de multiplicidade, ou seja, E = 1E, D = 2E, B = 3E e T = nE.

Observa-se que da situação *a* até a *c*, as relações se restringem à grandeza de comprimento. Nesse sentido, informamos que o comprimento se constitui como uma grandeza escalar e para a determinação do número que, até então, na organização do ensino de Davýdov e colaboradores é apenas positivo, basta verificar quantas vezes a grandeza tomada como unidade de medida cabe na grandeza a ser medida.

A situação *d,* ao solicitar a construção de vetores[3], permite a constatação do uso de uma grandeza diferente das situações anteriores, isto é, a vetorial. No que se refere às grandezas vetoriais, Winterle (2000, p. 1, grifos do autor) considera que elas

> [...] não ficam completamente definidas apenas pelo seu módulo, ou seja, pelo número com sua unidade correspondente. Falamos das grandezas *vetoriais*, que para serem perfeitamente caracterizadas necessitamos conhecer seu *módulo* (ou comprimento ou intensidade), sua *direção* e seu *sentido*.

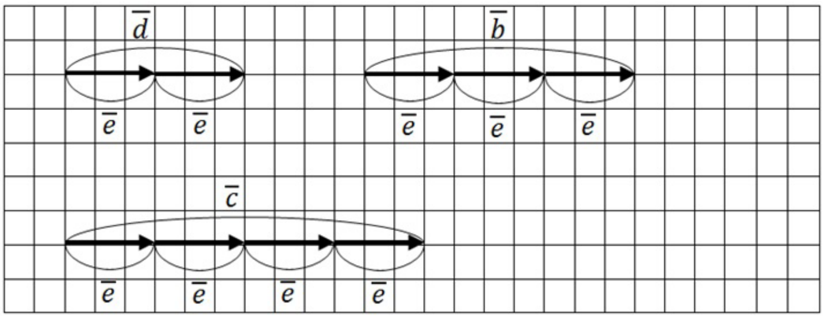
Em outras palavras, o uso da grandeza vetorial – representada genericamente por meio do vetor – carece da análise de outras características que não se apresentam com a grandeza escalar de comprimento, isto é, o sentido e a direção.

Isso nos possibilita afirmar que a grandeza vetorial também carrega o comprimento, porém, ao mesmo tempo, ela não se limita a ele, pois contém outras duas características: o sentido e a direção.

No contexto da grandeza vetorial, a situação *d*, diferentemente da situação *a*, exige que sejam construídos os vetores $\bar{d}$, $\bar{b}$ e $\bar{c}$ (figura 6) de mesmo sentido e direção de $\bar{e}$, em vez de apenas segmentos, como foi visto na situação *a*.

3 No capítulo anterior ao do número negativo nos livros de orientação ao professor e no didático do estudante ocorre a introdução do vetor.

Figura 6: Representação dos vetores $\overline{d}$, $\overline{b}$ e $\overline{c}$ por meio do vetor $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007)

A situação *e* tem a especificidade de possibilitar o início da comparação entre dois vetores. Em outras palavras, é realizada a medição dos vetores que, assim como ocorria com as grandezas escalares – desde o primeiro ano escolar – também será representada por um número. Contudo, a comparação de dois vetores não se limita apenas a seu módulo – o que não ocorre quando se compara dois comprimentos – ela também carece da comparação do sentido e a direção de ambos.

No que corresponde à comparação do sentido dos vetores, afirmamos que isso só é possível porque eles possuem a mesma direção, ou seja, pelo vetor ter uma direção e, além disso, por ele fazer parte de $\overline{b}$, $\overline{d}$ e $\overline{t}$, significa dizer que eles têm a mesma direção que $\overline{e}$.

Pelos vetores $\overline{t}$, $\overline{d}$, $\overline{b}$ e $\overline{e}$ terem o mesmo sentido da unidade $\overline{e}$ significa que a comparação entre eles seja representada pelos mesmos números das situações *b* e *c*, os positivos. Portanto, o resultado de tal comparação é: $\overline{t} = n\overline{e}$; $\overline{d} = 2\overline{e}$; $\overline{b} = 3\overline{e}$; $\overline{e} = 1\overline{e}$.

Essa situação em análise se caracteriza por gerar a necessidade de comparação dos sentidos dos vetores, além do módulo, para que se possa especificar a relação entre dois vetores. Tal necessidade de comparação do sentido dos vetores advém de que na organização de ensino de Davýdov e colaboradores ocorre a passagem do uso das grandezas escalares para as vetoriais, representadas por vetores.

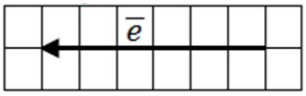
Contudo, destacamos que a tarefa 3 ainda não possibilitou a introdução do número negativo. Isso nos permite constatar que ainda falta algo diferente que, ao mesmo tempo, é essencial para o estudo de tal número. No que diz respeito a tal falta, informamos que a tarefa 4 tratará de fechar a referida lacuna que ainda existe.

Tarefa 4:

a) Construa os vetores:

$$1)\overline{d} = \frac{2}{3}\overline{e};\ \ 2)\overline{m} = 1\frac{5}{6}\overline{e};\ \ 3)\overline{b} = 1,5\overline{e};\ \ 4)\overline{a} = 1,5_{(6)}\overline{e}.$$

Figura 7: Representação do vetor unidade



Fonte: Adaptação de Горбов et al. (2007)

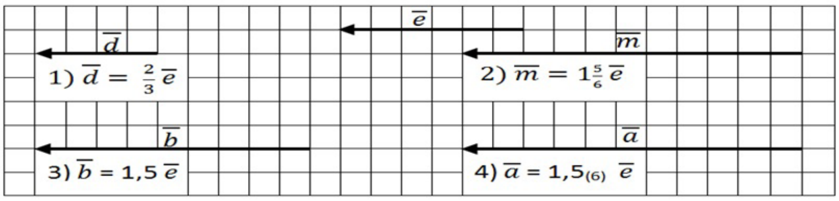
b) Construa um vetor oposto ao vetor $\overline{b}$.

c) Como definir a relação entre o vetor $\overline{b}$ com o vetor $\overline{e}$ (ligados por seu módulo e sentido)?

$$-\overline{b} = \quad \overline{e}; \qquad \frac{-\overline{b}}{\overline{e}} = \quad .$$

A situação a, assim como na tarefa anterior, também está no contexto da construção de vetores. Contudo, nessa tarefa, a construção de $\overline{d}, \overline{m}, \overline{b}$ e $\overline{a}$ (figura 8) ocorre a partir do vetor unidade $\overline{e}$ que envolve a singularidade numérica dos racionais (DAVÝDOV, 1982), bem como as diferentes bases numéricas.

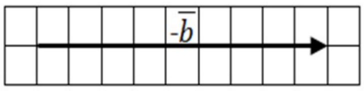
Figura 8: Representação dos vetores $\overline{d}, \overline{m}, \overline{b}$ e $\overline{a}$ a partir do vetor $\overline{e}$



Fonte: Resolução da situação com base na orientação de Горбов et al. (2007).

Em b, embora se continue com a construção de vetores, observa-se que é abordado um vetor com algo diferente em comparação aos anteriores, isto é, ele tem um sentido oposto em relação ao vetor $\overline{b}$ (figura 9). O oposto de um determinado vetor, para Winterle (2000), é aquele que mantém o mesmo módulo e direção, porém o seu sentido é contrário.

Figura 9: Representação do oposto do vetor $\overline{b}$



Fonte: Adaptação com base em Горбов et al. (2007)

Ao introduzir o vetor oposto é que o modo davydoviano de organização do ensino propõe, aos estudantes, a tarefa que traz algo de essencial ao estudo dos números negativos: o sentido oposto de um vetor em relação a outro.

No entanto, vale enfatizar que a introdução desses números somente acontece na resolução da situação c. Por essa situação tratar da comparação do vetor oposto - $\overline{b}$ com o $\overline{e}$, ela carece da explicitação das suas características de módulo e sentido. Isso significa o surgimento de outra necessidade: a especificação, não somente do seu módulo, mas essencialmente do seu sentido em relação ao vetor $\overline{e}$.

Pela situação *c* tratar da comparação do vetor oposto - $\overline{b}$ com a unidade

 ISSN 1982-7199 | DOI: http://dx.doi.org/10.14244/198271991455

$\bar{e}$, carece-se da explicitação das características de módulo e sentido dos referidos vetores. Em outras palavras, é gerada a necessidade de especificação não apenas do seu módulo em tal comparação, mas também do seu sentido em relação ao vetor $\bar{e}$.

A especificação da comparação dos vetores - $\bar{b}$ e $\bar{e}$ leva à necessária explicitação da relação entre o módulo e o sentido deles. E por se tratar da comparação de duas grandezas da mesma espécie, acarreta na medida do vetor - $\bar{b}$, a partir da unidade vetor $\bar{e}$. Tal medição proporciona que o resultado seja um número. Por consequência, apresenta-se a necessidade do registro numérico das características de módulo e sentido de ambos os vetores.

Na comparação do módulo e do sentido dos vetores - $\bar{b}$ e $\bar{e}$, o módulo pode ser expresso pelos números até então estudados na organização de ensino de Davýdov e colaboradores, os positivos. Contudo, falta a expressão da comparação do sentido dos vetores - $\bar{b}$ e $\bar{e}$ que são opostos.

Para que se possa cumprir o que foi solicitado na situação c, Горбов et al. (2006) sugerem a introdução de novos números, os quais expressam não somente a relação entre os módulos dos vetores - $\bar{b}$ e $\bar{e}$, mas também dos seus sentidos, necessariamente, opostos.

Desse modo, apresenta-se outra necessidade de ordem representativa e de distinção, pois no processo histórico não se criou um signo para os novos números. Por isso, precisa de um componente simbólico, sinal, que se acrescentará aos signos para diferenciá-los daqueles adotados para os números positivos. É esse sinal que caracteriza os números negativos e se vincula ao sentido oposto de dois vetores. Esse componente, segundo Горбов et al. (2006), corresponde ao sinal menos "-" que tem a finalidade de representar/indicar os sentidos opostos de dois vetores.

O sinal de menos, portanto, supriu a necessidade de representação dos novos números surgidos da relação entre dois vetores de sentidos contrários. Como dizem Горбов et al. (2006), o sinal de menos "-" indica que os novos números são opostos aos positivos.

Desse modo, verificamos que Davýdov e colaboradores atribuem o significado de oposto para o número negativo. Ou seja, tais autores da proposição de ensino em análise transferem a relação de 'vetores opostos' para 'os números opostos' (negativos), decorrentes da medição do vetor oposto com o auxílio do vetor unidade (ГОРБОВ et al., 2006).

No contexto do número negativo, informamos que somente depois do ensino das operações de adição e subtração com números negativos é que se introduzirá a nomenclatura "números negativos". Até então, conforme Горбов et al. (2006), importa que os estudantes compreendam a ideia básica caracterizadora do conceito: a relação 'ser oposto'. Por exemplo, o número -2 é o oposto do número 2, e não como um nome próprio de um número negativo, os números com "menos".

Essa referência conceitual (o oposto de) é base para que, na situação *c*, a relação de multiplicidade e divisibilidade – entre o vetor - $\bar{b}$ e o vetor $\bar{e}$ – seja expressa da seguinte forma: $-\bar{b} = -1{,}5\bar{e}$ e $\frac{-\bar{b}}{\bar{e}}$-1,5. Em se tratando da relação de multiplicidade, corresponde que o vetor oposto de *b* (- $\bar{b}$) é igual a uma vez e meia o vetor $\bar{e}$ e o sentido de ambos é oposto. Na relação de divisibilidade, o vetor oposto de *b* (- $\bar{b}$), ao ser dividido em partes iguais ao vetor $\bar{e}$, resulta em uma parte e meia e, também, com sentido oposto.

Nota-se que as relações entre grandezas, como base genética essencial do conceito de número, mantêm-se para os negativos, porém elas envolvem os vetores – representativos das grandezas vetoriais –, mais especificamente os de sentidos opostos. Portanto, eles foram introduzidos num processo cuja organização didática privilegiou a inter-relação das seguintes ideias: a construção dos vetores, a comparação do módulo e do sentido entre eles e a comparação entre aqueles de sentidos opostos.

A organização das tarefas particulares para a apropriação do conceito de número negativo com o significado de oposto, mediada pela grandeza vetorial (vetor), permite a inferência de que o ensino do referido conceito só é possível porque a mencionada grandeza possui característica diferente das escalares.

As grandezas escalares não apresentam a credencial necessária ao estudo do número negativo, isto é, o sentido. Por isso, a emergência de uma organização que crie as condições didáticas de passagem da grandeza escalar para a vetorial no estudo dos números, conforme a situação *d* da tarefa 3. É, pois, dessa situação que brotam necessidades conceituais que identificaremos a seguir.

O vetor, como condição genética, explica a insuficiência das grandezas escalares para o estudo do número negativo, pois elas não apresentam uma característica essencial a tal finalidade: o sentido. Daí que a situação *d* da tarefa 3 se caracterize como uma necessidade. Isto é, a passagem das grandezas escalares para as vetoriais.

A situação *e* (tarefa 3) também motiva a emergência de uma necessidade conceitual, pela exigência de comparar, além dos módulos dos vetores, os seus sentidos ausentes nas grandezas escalares, que são o conhecimento predominante dos estudantes.

Pelo fato de o vetor oposto estar ausente no contexto dos números e, ao mesmo tempo, constituir-se como elemento conceitual do número negativo, a sua construção (situação *b* da tarefa 4) se transforma em uma necessidade para a introdução do referido número.

No contexto das necessidades identificadas nas tarefas 3 e 4, constatamos que para o estudo e apropriação do conceito "número negativo" foi necessário ocorrer a passagem da comparação de grandezas escalares para a vetorial, pois o número negativo decorre da medição de vetores em que um deles possui sentido oposto.

Considerações finais

A análise das quatro tarefas particulares nos permitiu a constatação de que Davýdov e colaboradores recorrem aos conceitos de subtração e equação que foram aprendidos pelos estudantes em anos anteriores para fazer emergir a necessidade do estudo do número negativo, pois os positivos não permitem solucionar alguns casos de subtrações e equações.

No que se refere aos números, vale enfatizar que na organização do ensino de Davýdov e colaboradores, eles decorrem da comparação/medição das grandezas. E por tais autores da referida proposição de ensino considerarem que a essência do número negativo está no significado de oposto, houve a necessidade de realizar a passagem do estudo das grandezas escalares para as vetoriais.

Essa mudança de grandeza produziu outra necessidade por requerer a observação não apenas do módulo como também do sentido dos vetores. O sentido é condição de comparação entre vetores e de indicação se seu resultado será um número positivo ou negativo. No contexto da exigência apontada, outra necessidade conceitual diz respeito à presença de um vetor oposto.

Além dessas, outras três foram identificadas, que emergem no âmbito da comparação de dois vetores com sentidos opostos. Na comparação produziu a carência de especificação do módulo e do sentido de um vetor oposto em relação a outro vetor não oposto. Também ocorreu a necessidade de seu registro numérico e de ordem de representação e distinção. Trata-se da atribuição de um sinal, o de menos "-", para representar e diferenciar os números negativos – para os quais se usam os mesmos signos que os dos positivos. Com o referido sinal, os negativos se caracterizam como opostos aos positivos.

Com base que o estudo do conceito de número na proposição davydoviana está sempre vinculado à sua representação na reta numérica e pelas tarefas analisadas não permitirem constatar como ocorre a introdução do número negativo em tal reta, para um próximo estudo fica o desejo de abordar de que modo é inserido o número negativo na reta numérica.

Referências

AMORIM, S. R. C. **Números inteiros**: Panorama de Pesquisas Produzidas de 2001 a 2010. 2012. 128 f. Dissertação (Mestrado Profissional em Ensino de Matemática) - Pontifícia Universidade Católica de São Paulo, São Paulo, 2012.

BRASIL. Secretaria de Educação Fundamental. **Parâmetros curriculares nacionais**: matemática. Brasília, DF, 1998.

CARAÇA, B. J. **Conceitos fundamentais da matemática.** 7. ed. Lisboa: Gradiva, 2010.

COSTA, J. M. C. **Tratado de arithmetica**. Lisboa: Imprensa Nacional, 1866.

DAMAZIO, A. Mathematical cognition in the class-room: A cultural-historical approach. In: HEDEGAARD, M. (Org.). **A cultural-historical approach learning in classrooms.** Aarhus: Aarhus University Press, 2001, p. 191-210.

DAVÍDOV, V. **La enseñanza escolar y el desarrollo psíquico.** Moscú: Progreso, 1988.

DAVÍDOV, V. V.; SLOBÓDCHIKOV, V. I. La enseñanza que desarrolla en la escuela del desarrollo. In**:** LIJMETS, J. L. **La educación y la enseñanza**: una mirada al futuro. Moscú: Progreso, 1991, p. 118-144.

DAVÝDOV, V. V. **Tipos de generalización en la enseñanza.** 3. ed. Habana: Pueblo y Educación, 1982.

LEONTIEV, A. N. Las necesidades y los motivos de la actividad. In: SMIRNOV, A. A. et al. (Org.). **Psicologia**. 4. ed. México: Grijalbo, 1978, p. 341-354.

ROSA, J. E. **Proposições de Davydov para o ensino de matemática no primeiro ano escolar**: inter-relações dos sistemas de significações numéricas. 2012. 244 f. Tese (Doutorado em Educação) – Universidade Federal do Paraná, Curitiba, 2012.

SILVA, M. A. **Elaborações de estudantes do 7º ano do Ensino Fundamental sobre números inteiros e suas operações**. 2012. 123 f. Dissertação (Mestrado em Ciências Exatas e Tecnologia) – Universidade Federal de São Carlos, São Carlos, 2012.

SOUZA, M. B. **O ensino do conceito de número**: objetivações nas proposições davydovianas e formalista moderna. 2013. 237 f. Dissertação (Mestrado em Educação) – Universidade do Extremo Sul Catarinense, Criciúma, 2013.

WINTERLE, P. **Vetores e geometria analítica.** São Paulo: Makron Books, 2000.

ГОРБОВ, С. Ф.; ЗАСЛАВСКИЙ, В. М.; ЗАХАРОВА, О. А.; МОРОЗОВА, А. В.; ТАБАЧНИКОВА. Н. Л. Обучение математике**. 6**класс: Пособие для учителя (Система Д. Б. Эльконина — В. В. Давыдова). М.: Бита-Пресс, 2006, 64с. GORBOV, S. F.; ZASLAVSKY, V. M.; ZAKHAROV, O. A.; MOROZOV, A. V.; TABACHNIKOVA, N. L. **Aprender matemática – 6º ano:** Guia do Professor (Sistema D.B. Elkonin – V.V. Davydov). Moscou: Vita--Press, 2006. 64 p.

ГОРБОВ, С. Ф.; ЗАСЛАВСКИЙ, В. М.; ЗАХАРОВА, О. А.; МОРОЗОВА, А. В.; ТАБАЧНИКОВА. Н. Л. Математика: Учеб. Пособие для 6 класса общеобразоват. учрежд. (Система Д. Б. Элькснжна — Б. В. Давыдова). 2-е изд. М.: Вита-Пресс, 2007. 80 с. GORBOV, S. F.; ZASLAVSKY, V. M.; ZAKHAROV, O. A.; MOROZOV, A. V.; TABACHNIKOVA, N. L. **Matemática:** livro didático – 6º ano (Sistema D. B. Elkonin – V. V. Davydov). 2. ed. Moscou: Vita-Press, 2007. 80 p.

Enviado em: Outubro 28, 2015. Aprovado em: Março 18, 2016.