Artigo Tradução

Desenvolvimento Instrumental do Raciocínio dos Professores em Geometria Dinâmica[1 2 3]

Instrumental Development of Teachers' Reasoning in Dynamic Geometry

Muteb M. Alqahtani[4]
Rutgers University, Newark-NJ, EUA

Arthur B. Powell[5]
Rutgers University, Newark-NJ, EUA

Resumo

Com o intuito de contribuir para o entendimento de como os professores podem desenvolver a compreensão da geometria, este artigo trata do desenvolvimento discursivo do raciocínio geométrico dos professores através de apropriação de instrumentos enquanto colaborando em um ambiente de geometria dinâmica (AGD) *online*. Utilizando a teoria da atividade mediada por instrumentos, analisamos o discurso e as ações AGD de um grupo de professores de matemática do ensino fundamental e médio que participaram de um curso de desenvolvimento profissional com duração de um semestre. Trabalhando em pequenos grupos, eles interagiram para resolver problemas geométricos. Nossos resultados mostram que na medida em que se apropriam dos artefatos AGD e transformam seus componentes em instrumentos, os professores desenvolvem o conhecimento e raciocínio geométricos em geometria dinâmica. Nosso estudo contribui para uma compreensão ampla de como os professores desenvolvem o conhecimento matemático para o ensino.
Palavras-chave: Geometria dinâmica, Gênese instrumental, Conhecimento para o ensino de matemática, Colaboração.

Abstract

To contribute to understanding how teachers can develop geometrical understanding, we report on the discursive development of teachers' geometrical reasoning through instrument appropriation while collaborating in an online dynamic geometry environment (DGE). Using the theory of instrument-mediated activity, we analysis the discourse and DGE actions of a group of middle and high school mathematics teachers who participated in a semester-long, professional development course. Working in small teams, they collaborated to solve geometric problems. Our results show that as teachers appropriate DGE artifacts and transform its components into instruments, they develop their geometrical knowledge and reasoning in dynamic geometry. Our study contributes to a broad understanding of how teachers develop mathematical knowledge for teaching.
Keywords: Dynamic geometry, Instrumental genesis, Mathematical knowledge for teaching, Collaboration.

---

1 Este artigo se baseia em um trabalho financiado pelo programa DRK-12 da National Science Foundation, sob a concessão DRL-1118888. As conclusões e opiniões relatadas são de responsabilidade dos autores e não refletem necessariamente os pontos de vista da agência financiadora.

2 Uma versão deste artigo foi apresentada na Reunião Anual 2015 da American Educational Research Association, 16-20 de abril de 2015, em Chicago, Illinois, EUA.

3 Tradução do original *Instrumental Development of Teachers' Reasoning in Dynamic Geometry*, por Leonardo Abramowicz, também publicado nesta edição.

4 Rutgers University Graduate School of Education, New Jersey, USA. E-mail: muteb.alqahtani@gse.rutgers.edu

5 Professor Associado de Educação Matemática, Department of Urban Education at the Newark campus of Rutgers University, New Jersey, USA. E-mail: powellab@andromeda.rutgers.edu

Uma importante área da matemática é a Geometria. Ela auxilia na compreensão de conceitos e procedimentos em outras áreas, como álgebra, cálculo e análise, além de ajudar em formas de argumentação como o raciocínio dedutivo e a demonstração. Ela fornece imagens visuais, ao lado de representações analíticas de conceitos matemáticos, que promovem a aprendizagem dos alunos, enfatizando ou suprimindo aspectos dos conceitos (DAVIS, 1992; GOLDENBERG, 1988; PIEZ; VOXMAN, 1997). O papel vital da geometria sugere que os educadores de matemática fariam bem em investigar como os alunos podem desenvolver uma profunda compreensão geométrica e que apoio os professores poderiam fornecer. A compreensão da geometria pelos professores faz parte de seu conhecimento da matéria (BALL; THAMES; PHELPS, 2008; HERBST; KOSKO, 2014; HILL; ROWAN; BALL, 2005; HILL; SCHILLING; BALL, 2004; SHULMAN, 1986, 1987), e está significativamente relacionada com o desempenho dos alunos (BALL; HILL; BASS, 2005; CAMPBELL e outros, 2014; HILL e outros, 2005; ROWAN; CHIANG; MILLER, 1997). Com o intuito de contribuir para o entendimento de como os professores podem desenvolver a compreensão da geometria, este artigo trata do desenvolvimento do raciocínio geométrico dos professores através de apropriação de instrumentos enquanto colaborando em um ambiente de geometria dinâmica (AGD) *online*. Nossa questão norteadora central é a seguinte: como os professores desenvolvem seu raciocínio geométrico através de apropriação de instrumentos em um ambiente colaborativo de aprendizagem virtual que inclua AGD?

Correntes teóricas e análise da literatura

Para tratar de nossa questão norteadora de pesquisa, arregimentamos correntes teóricas sobre o conhecimento matemático dos professores e da atividade mediada por instrumentos. No que tange ao conhecimento teórico dos professores, utilizamos o conceito de conhecimento matemático para o ensino (BALL e outros, 2008; HILL e outros, 2005; HILL e outros, 2004). Para entender a apropriação de instrumentos pelos professores, empregamos a teoria de Robardel (2005), da atividade mediada por instrumentos, que gera vários modelos para explicar o papel mediador de um artefato e o desenvolvimento instrumental. O conceito básico da teoria é que os sujeitos (usuários, operadores, alunos,...) se envolvem em uma atividade em que as ações são realizadas em torno de um objeto (a matéria, a realidade, objetos de trabalho,...) para alcançar uma meta utilizando um artefato (material ou componente conceitual). O artefato ganha o *status* de instrumento na medida em que os sujeitos desenvolvem esquemas de utilização, incluindo esquemas de uso e esquemas de utilização coletiva mediada por instrumentos. Para os indivíduos, o esquema de uso se constitui em seu conhecimento básico de como operar com artefatos, enquanto que o esquema de utilização coletiva mediada por instrumentos está relacionado com as ações que os indivíduos realizam coletivamente em torno de um objeto, como uma tarefa matemática para atingir um objetivo específico (LONCHAMP, 2012; RABARDEL; BEGUIN, 2005).

Os esquemas de utilização passam a fazer parte do conhecimento dos indivíduos e permitem que eles utilizem os artefatos de forma eficaz. Dado um artefato empregado pelos professores para realizar uma tarefa matemática e, posteriormente, para refletir sobre questões pedagógicas, consideramos os esquemas de utilização desenvolvidos como parte de seu conhecimento matemático para o ensino. Utilizando as categorias de Shulman (1986, 1987), Hill, Ball e Schilling (2008) dividem este conhecimento em dois domínios principais: o conhecimento da matéria e o conhecimento do conteúdo pedagógico. Neste estudo, vamos nos concentrar no domínio do conhecimento da matéria. Mais especificamente, analisamos uma das três subdivisões do conhecimento (comum, especializado e horizonte), o "conhecimento do conteúdo comum" da geometria que os professores desenvolvem de forma colaborativa em um ambiente de aprendizagem virtual.

Os pesquisadores têm examinado o desenvolvimento de conhecimento do conteúdo comum da geometria por parte dos professores. Alguns estudos empregaram testes e questionários (BATURO; NASON, 1996; BJULAND, 2004; CHINNAPPAN; LAWSON, 2005; YANIK, 2011; ZAZKIS; LEIKIN, 2008) e outros utilizaram entrevistas para medir como os professores resolvem problemas geométricos (CAVEY; BERENSON, 2005; DE VILLIERS, 2004; LAVY; SHRIKI, 2010; SINCLAIR; YURITA, 2008; STEELE, 2013; STOLS, 2012). Ao contrário desses estudos, o nosso procura compreender o desenvolvimento do conhecimento geométrico dos professores enquanto colaborando *online* para construir objetos e resolver problemas geométricos, e se apropriar de artefatos instrumentais de um ambiente de geometria dinâmica.

A apropriação em ambientes de geometria dinâmica obriga os professores a utilizar as principais ferramentas de ADGs, como arraste e dependência. O arraste permite que os usuários tomem consciência da dependência direta e indireta do movimento. A dependência direta do movimento representa as variações de arrastar elementos básicos, como pontos. Quando o arraste desses elementos determina o movimento de outros objetos, ocorre uma dependência indireta do movimento (MARIOTTI, 2006). A dependência de movimento pode ser interpretada utilizando dependência lógica, que segue a teoria da geometria (MARIOTTI, 2006). Os esquemas de utilização desenvolvidos pelos professores podem explicar esses tipos de dependências. O arraste pode dar informações aos esquemas de utilização dos professores, permitindo-lhes experimentar dependências de movimento e, em seguida, interpretá-las usando a teoria da geometria.

Fonte de dados e metodologia

Extraímos nossos dados para este estudo de um curso *online* de desenvolvimento profissional. Um grupo de 13 professores de matemática do ensino fundamental e médio foi dividido em pequenas equipes em um ambiente virtual chamado *Virtual Math Teams with GeoGebra* (VMTwG). O VMTwG é um produto resultante de um projeto de pesquisa colaborativo entre pesquisadores da Rutgers University e da Drexel University. O VMTwG contém salas de bate-papo com ferramentas de colaboração para explorações matemáticas incluindo uma versão dinâmica, multiusuário, do GeoGebra, onde os membros da equipe podem construir objetos dinâmicos e arrastar os elementos básicos em suas telas. Ao longo de 14 semanas, no outono de 2013, as equipes se reuniram *online* duas vezes por semana, pelo período de duas horas a cada reunião. Durante as reuniões, eles trabalharam de forma colaborativa na construção de objetos geométricos e na resolução de problemas abertos (*open-ended*) de geometria. Eles foram guiados por instruções para discutir as ideias matemáticas em que estavam envolvidos e para explicar as razões para suas ações no GeoGebra. Os problemas foram organizados em Tópicos, cada um contendo várias tarefas. Para este relatório, analisamos o trabalho da Equipe 1, composta por quatro professores do ensino fundamental e médio, para ilustrar a evolução de seu raciocínio geométrico. Escolhemos esta equipe porque seus membros foram os que mais se destacaram no trabalho colaborativo no VMTwG.

Para entender a evolução do raciocínio geométrico da Equipe 1, analisamos o discurso e a instrumentação de seus membros. Utilizando a análise de conteúdo convencional (HSIEH; SHANNON, 2005), estudamos os dados discursivos para entender o processo de desenvolvimento da apropriação de instrumentos, o que fornece *insights* sobre como evolui seu raciocínio geométrico. Os dados discursivos incluem o histórico das conversas da equipe e as ações GeoGebra. A partir do histórico das conversas examinamos a evolução da compreensão da geometria dinâmica por parte da equipe e sua interação discursiva ao resolver os problemas geométricos. Na próxima seção apresentamos alguns episódios que acreditamos ilustrar o entendimento da equipe sobre movimento e dependências lógicas, que ocorre paralelamente à sua apropriação de ferramentas.

Resultados

Nossa análise revela evidências de mudanças simultâneas no discurso matemático dos professores e na apropriação instrumental do VMTwG, indicando o desenvolvimento do conhecimento e raciocínio geométricos. A título de exemplo, nossa análise aqui apresentada mostra como a equipe trabalha em sua compreensão de um importante conceito de geometria dinâmica – a dependência – e como esse entendimento pode ser mutuamente constitutivo da apropriação de instrumentos.

Durante a primeira sessão de colaboração com construções simples, os membros da Equipe 1 evidenciaram uma compreensão da dependência de movimento em geometria dinâmica. Em sua segunda sessão, esta equipe trabalhou para identificar e construir diferentes tipos de triângulos e, em seguida, reexaminar triângulos previamente analisados para descobrir as dependências envolvidas em sua construção (Figura 1).

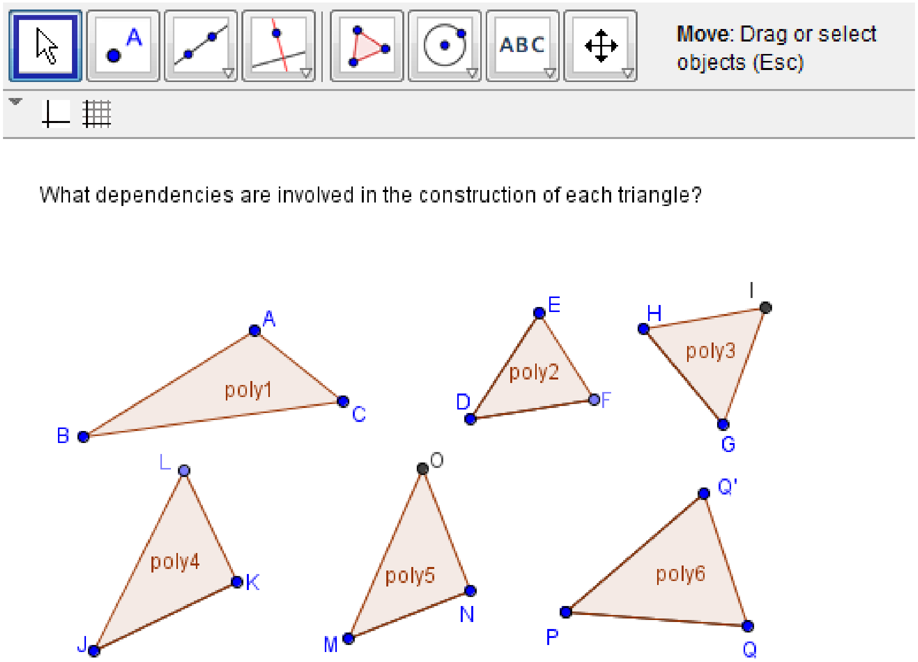

Figura 1 – imagem de uma tarefa sobre examinar dinamicamente diferentes triângulos

Move: drag or select objects (Esc) = **Movimento**: arrastar ou selecionar objetos (Esc)

What dependencies are involved in the construction of each triangle? = Que dependências estão envolvidas na construção de cada triângulo?

Os vértices do primeiro triângulo (poly1) foram construídos como objetos independentes, de modo que a equipe não entrou em detalhes discutindo-os. O poly2 é um triângulo isósceles; os comprimentos DE e DF são iguais. O ponto F fica restrito a um círculo oculto de raio DE. Os pontos D e E são objetos independentes. Aqui está um trecho da discussão da Equipe 1 na qual, ao arrastar os pontos básicos do triângulo poly2, os membros da equipe observam dependências entre os objetos:

Linha	**Membro da equipe**	**Post na discussão**
386	ceder:	então no segundo, f é dependente de g
387	ceder:	quero dizer, d
388	ceder:	não g
389	bhupinder_k:	o E de D também
390	sunny blaze:	então ED e FD são dependentes do ângulo D?
391	bhupinder_k:	eu acho que F depende tanto de E quanto de D
392	ceder:	f não parece dependente de nada agora... estou deixando escapar algo?
393	ceder:	ok, o que não estou vendo? F pode se mover independentemente, mas quando E é movido, F se move; então qual deles é dependente?
394	bhupinder_k:	quando você move F, ED permanece fixo
395	ceder:	certo; então F é livre para se mover para qualquer lugar
396	ceder:	mas não quando E é movido
397	ceder:	então F é às vezes dependente?

A equipe discute as dependências entre pontos, segmentos e ângulos. Nas linhas 386 a 388, ceder afirma que F é dependente de D e, em seguida, descarta sua afirmação na linha 392. Antes disso, *sunny blaze* resume sua compreensão na forma de perguntas: "então, quando arrasto E, F se move, de modo que F depende de E?" (Linha 390). Isto indica a dificuldade que tinham para identificar a dependência quando os pontos eram parcialmente restritos. Eles utilizaram um vocabulário diferente, como "às vezes dependente" (Linha 397), ao tentar entender a dependência em um ambiente de geometria dinâmica. Embora já tivessem visto e, uma semana antes, construído objetos independentes em sua primeira sessão colaborativa, os professores tiveram dificuldade com esta situação nova e mais complexa. O conceito de dependência é fundamental para o desenvolvimento de esquemas de utilização que permitam aos usuários identificar dependências de movimento e construir dependências lógicas em suas construções geométricas.

O esforço para se apropriar do conceito de dependência foi importante e permitiu que a Equipe 1 o utilizasse de forma adequada em sessões posteriores. No trecho a seguir, extraído da sessão subsequente ao trecho anterior, os membros da equipe utilizam o conceito para desenvolver um procedimento de construção conforme solicitado na tarefa mostrada na Figura 2:

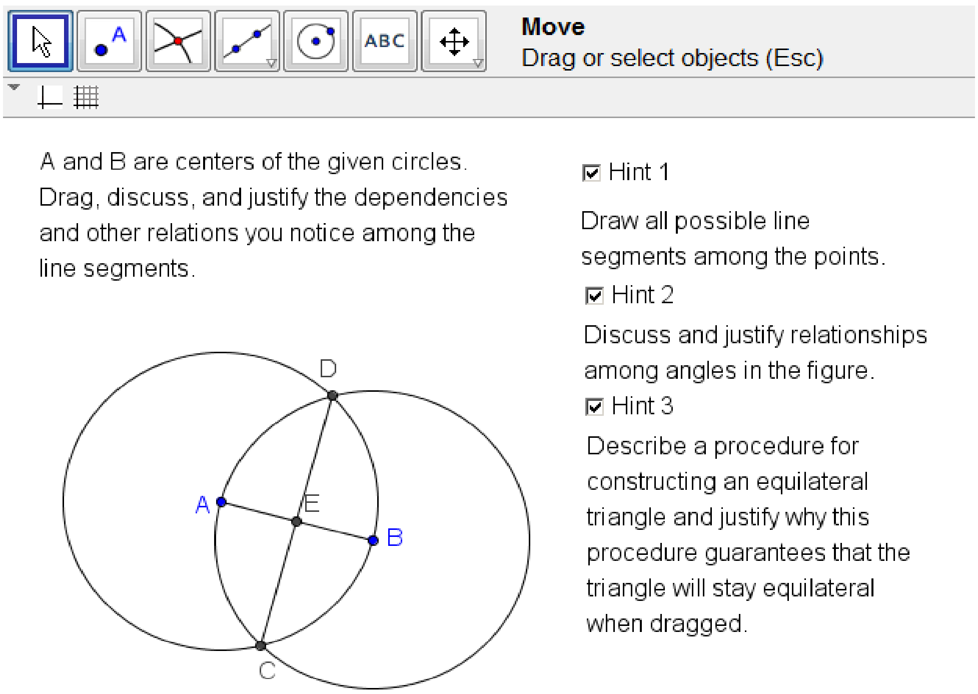

Figura 2 – uma tarefa referente a mediatrizes

Move: drag or select objects (Esc) = **Movimento**: arrastar ou selecionar objetos (Esc)

A and B are centers of the given circles. Drag, discuss, and justify the dependencies and other relations you noticed among the line segments = A e B são os centros dos círculos dados. Arraste, discuta e justifique as dependências e outras relações que você observa entre os segmentos de reta.

Hint 1 = Dica 1

Draw all possible line segments among the points = Desenhe todos os segmentos de reta possíveis entre os pontos.

Hint 2 = Dica 2

Discuss and justify relationships among angles in the figure = Discuta e justifique as relações entre os ângulos na figura.

Hint 3 = Dica 3

Describe a procedure for constructing an equilateral triangle and justify why this procedure guarantees that the triangle will stay equilateral when dragged = Descreva um procedimento para a construção de um triângulo equilátero e justifique por que este procedimento garante que o triângulo permanecerá equilátero quando arrastado.

Linha	**Membro da equipe**	**Post na discussão**
197	ceder	parece que C, D e E são dependentes de A e B
198	bhupinder_k	certo
199	sunny blaze	então eu noto que quando arrasto A, o círculo B muda, de modo que o círculo B depende de A. E vice-versa. Como ambos compartilham o mesmo raio, suas áreas são iguais
200	bhupinder_k	CB = AC = AD = BD
201	ceder	sim, eu concordo que a área dos círculos depende do segmento de reta AB
202	sunny blaze	CE = DE e BE = AE
203	ceder	certo
204	ceder	eu acho que isto cobre a parte dos segmentos de reta
205	ceder	CD é dependente de AB
206	sunny blaze	isto é a coisa de mediatriz? (não tenho certeza de como é chamado)
207	bhupinder_k	pergunta: os pontos em negrito serão sempre dependentes?
208	ceder	foi o que eu notei

Nesta tarefa, dois círculos dados foram construídos utilizando o mesmo raio. Seus pontos de intersecção foram interligados para criar uma mediatriz ao raio AB. O trecho mostra que a equipe utiliza o conceito de dependência de movimento para identificar relações entre os objetos na Figura 2. Na linha 197, ceder afirma que os pontos C, D e E são dependentes de A e B. Outro professor, na linha 199, afirma que os dois círculos compartilham o mesmo raio e que arrastando o centro de um círculo, o tamanho do outro é afetado, o que faz com que os círculos sejam logicamente dependentes dos centros. Os professores se apropriaram dos conceitos de movimento e de dependência lógica e os utilizaram para entender as construções nesta tarefa.

Esta apropriação faz parte do desenvolvimento do esquema de utilização. Seu primeiro tipo de esquema de utilização, o esquema de uso, evidenciou claramente como os professores utilizaram o arraste para descrever o comportamento dos pontos, segmentos de reta e círculos. Suas observações ajudaram a identificar relações entre os objetos geométricos. O trabalho colaborativo da equipe para desenvolver um procedimento de construção na segunda tarefa indica que eles desenvolveram um esquema de utilização coletiva mediada por instrumentos.

O trabalho dos professores nessas tarefas ajudou a aprofundar a compreensão da dependência. Em resumo, para se apropriar do conceito de dependência (tanto a de movimento quanto a lógica), os professores precisaram de uma situação em que as dependências são as relações fundamentais entre os objetos geométricos. Esta necessidade, juntamente com o recurso de arrastar, gerou discussões sobre como utilizar o conceito de dependência neste tipo de ambiente. Tais discussões explícitas representaram um passo importante dado pelos professores para entender como reconhecer e aplicar esses novos conceitos de movimento e de dependência lógica em um contexto de matemática dinâmica. Este passo ajuda os professores a superar a dificuldade de utilizar o vocabulário cotidiano em novas situações matemáticas (PIMM, 1987). O passo seguinte foi testar a sua compreensão em outra situação, neste exemplo outro triângulo, e aplicar o entendimento inicial na nova configuração. Depois de desenvolver e testar sua compreensão coletiva da dependência, os professores revisitaram sua compreensão em outra tarefa e utilizaram a dependência para discutir relações entre os objetos geométricos.

Conclusão

Os resultados mostram como os professores se apropriam do VMTwG como artefato e transformam seus componentes em instrumentos. Os professores da Equipe 1 se apropriaram de ferramentas do VMTwG, como o recurso do bate-papo e do arraste no GeoGebra, que os ajudaram a observar a dependência de movimento e a construir a dependência lógica entre objetos geométricos. Esta apropriação evidencia seus esquemas de utilização que transformaram os artefatos VMTwG em instrumentos. Com esses esquemas de utilização, os professores desenvolveram seu conhecimento e raciocínio geométricos sobre movimento e dependência lógica, enquanto se engajavam em um processo de instrumentação. Isto equivale ao desenvolvimento de conhecimento e raciocínio geométricos por parte dos professores. A interação no ambiente exigiu que os professores desenvolvessem esquemas de utilização. O desenvolvimento destes esquemas promove nos professores o desenvolvimento de seu conhecimento e raciocínio geométricos, assim como seu conhecimento sobre AGDs.

Mostrar o processo de apropriação da dependência em ambiente dinâmico colaborativo fornece *insights* sobre como novos conceitos e ferramentas podem ser apropriados. Este estudo também fornece elementos para a concepção de ambientes de aprendizagem. Ele mostra como a colaboração *online* para a resolução de problemas de geometria dinâmica promove a aprendizagem através de um processo de apropriação de instrumentos. Novas pesquisas podem examinar como a apropriação de outras ferramentas ADG pelos professores molda o seu conhecimento matemático.

Referências

BALL, D. L., HILL, H. C., & BASS, H. (2005). Knowing mathematics for teaching: Who knows mathematics well enough to teach third grade, and how can we decide? *American Educator, 29*(3), 14-17, 20-22, 43-46.

BALL, D. L., THAMES, M. H., & PHELPS, G. (2008). Content Knowledge for Teaching: What Makes It Special? *Journal of Teacher Education, 59*(5), 389-407.

BATURO, A., & NASON, R. (1996). Student teachers' subject matter knowledge within the domain of area measurement. *Educational Studies in Mathematics, 31*(3), 235-268.

BJULAND, R. (2004). Student teachers' reflections on their learning process through collaborative problem solving in geometry. *Educational Studies in Mathematics, 55*(1-3), 199-225.

CAMPBELL, P. F., NISHIO, M., SMITH, T. M., CLARK, L. M., CONANT, D. L., RUST, A. H., . . . CHOI, Y. (2014). The Relationship Between Teachers' Mathematical Content and Pedagogical Knowledge, Teachers' Perceptions, and Student Achievement. *Journal for Research in Mathematics Education, 45*(4), 419-459.

CAVEY, L. O., & BERENSON, S. B. (2005). Learning to teach high school mathematics: Patterns of growth in understanding right triangle trigonometry during lesson plan study. *Journal of Mathematical Behavior, 24*(2), 171-190.

CHINNAPPAN, M., & LAWSON, M. J. (2005). A framework for analysis of teachers' geometric content knowledge and geometric knowledge for teaching. *Journal of Mathematics Teacher Education, 8*(3), 197-221.

DAVIS, R. B. (1992). Understanding "understanding". *The Journal of Mathematical Behavior, 11*, 225-241.

DE VILLIERS, M. (2004). Using dynamic geometry to expand mathematics teachers' understanding of proof. *International Journal of Mathematics Education in Science & Technology, 35*(4), 703-724.

GOLDENBERG, E. P. (1988). Mathematics, metaphors, and human factors: Mathematical, technical, and pedagogical challenges in the educational use of graphical representation of functions. *The Journal of Mathematical Behavior*.

HERBST, P., & KOSKO, K. (2014). Mathematical Knowledge for Teaching and its Specificity to High School Geometry Instruction. In J.-J. Lo, Leatham, Keith R., Van Zoest, R. Leatham & L. R. (Eds.), *Research Trends in Mathematics Teacher Education* (pp. 23-45). Switzerland: Springer International Publishing.

HILL, H. C., BALL, D. L., & SCHILLING, S. G. (2008). Unpacking pedagogical content knowledge: Conceptualizing and measuring teachers' topic-specific knowledge of students. *Journal for Research in Mathematics Education*, 372-400.

HILL, H. C., ROWAN, B., & BALL, D. L. (2005). Effects of teachers' mathematical knowledge for teaching on student achievement. *American Educational Research Journal, 42*(2), 371-406.

HILL, H. C., SCHILLING, S. G., & BALL, D. L. (2004). Developing measures of teachers' mathematical knowledge for teaching. *Elementary School Journal, 105*(1), 11-30.

HSIEH, H.-F., & SHANNON, S. F. (2005). Three approaches to qualitative content analysis. *Qualitative Health Research, 15*(9), 1277-1288.

LAVY, I., & SHRIKI, A. (2010). Engaging in problem posing activities in a dynamic geometry setting and the development of prospective teachers' mathematical knowledge. *The Journal of Mathematical Behavior, 29*(1), 11-24.

LONCHAMP, J. (2012). An instrumental perspective on CSCL systems. *International Journal of Computer--Supported Collaborative Learning, 7*(2), 211-237.

MARIOTTI, M. A. (2006). Proof and proving in mathematics education. *Handbook of research on the psychology of mathematics education: Past, present and future*, 173-204.

PIEZ, C. M., & VOXMAN, M. H. (1997). Multiple representations—Using different perspectives to form a clearer picture. *The Mathematics Teacher*, 164-166.

PIMM, D. (1987). *Speaking Mathematically: Communication in Mathematics Classrooms*: Routledge & Kegan Paul London.

RABARDEL, P., & BEGUIN, P. (2005). Instrument mediated activity: from subject development to anthropocentric design. *Theoretical Issues in Ergonomics Science, 6*(5), 429-461.

ROWAN, B., CHIANG, F.-S., & MILLER, R. J. (1997). Using research on employees' performance to study the effects of teachers on students' achievement. *Sociology of Education*, 256-284.

SHULMAN, L. S. (1986). Those who understand knowledge growth in teaching. *Educational Researcher, 15*(2), 4-14.

SHULMAN, L. S. (1987). Knowledge and teaching: Foundations of the new reform. *Harvard Educational Review, 57*(1), 1-22.

SINCLAIR, N., & YURITA, V. (2008). To be or to become: How dynamic geometry changes discourse. *Research in Mathematics Education, 10*(2), 135-150.

STEELE, M. D. (2013). Exploring the mathematical knowledge for teaching geometry and measurement through the design and use of rich assessment tasks. *Journal of Mathematics Teacher Education, 16*(4), 245-268.

STOLS, G. (2012). Does the use of technology make a difference in the geometric cognitive growth of pre-service mathematics teachers? *Australasian Journal of Educational Technology, 28*(7), 1233-1247.

YANIK, H. B. (2011). Prospective middle school mathematics teachers' preconceptions of geometric translations. *Educational Studies in Mathematics, 78*(2), 231-260.

ZAZKIS, R., & LEIKIN, R. (2008). Exemplifying definitions: a case of a square. *Educational Studies in Mathematics, 69*(2), 131-148.

Enviado em: 11/05/2015. Aprovado em: 29/05/2015.